2.1 STURMSCHES ANFANGSWERTPROBLEM UND DGL 2. ORDNUNG

So genannte Anfangswertprobleme treten sehr häufig bei naturwissenschaftlichen und technischen Problemstellungen auf. Hierbei handelt es sich in der Regel um DGL 1. Ordnung oder 2. Ordnung, bei denen die gesuchte Funktion bzw. deren Ableitung zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 vorgegeben ist. Grundsätzlich lässt sich die DGL 2. Ordnung

$$\ddot{y}(t)+a_1(t)\dot{y}(t)+a_0(t)y(t)=g(t)\cdot \tag{2.1}$$

bei stetigem $a_1(t)$ immer auf die folgende Form bringen:

$$\frac{d}{dt}\{p(t)\dot{y}(t)\}-q(t)y(t)+\lambda r(t)y(t)=h(t)\cdot \tag{2.2}$$

Dazu muss Gl. (2.1) lediglich mit $p(t)=\exp\left(\int^t ds a_1(s)\right)$ multipliziert werden. Ferner gilt:

$$p(t)a_0(t)=\lambda r(t)-q(t)$$
$$p(t)g(t)=h(t)$$

Der *Sturmsche Differentialoperator* ist wie folgt definiert:

> *Definition*: Sturmscher Differentialoperator:
> Sei $y\in C^2(I\subseteq R)$, dann gilt:
>
> $$S\circ y(t):=-\frac{d}{dt}\{p(t)\dot{y}(t)\}+q(t)y(t)\cdot \tag{2.3}$$

Ein *Sturmsches Anfangswertproblem* liegt nun vor, wenn eine Funktion $y(t)$ auf einem Intervall $I\subseteq R$ derart bestimmt werden muss, so dass die folgenden Kriterien erfüllt sind:

$$S\circ y(t)=f(t);\quad \text{mit } f(t)=\lambda r(t)y(t)-h(t)$$
$$y(0)=y_0 \qquad \text{1. Anfangsbedingung}$$
$$\dot{y}(0)=\dot{y}_0 \qquad \text{2. Anfangsbedingung}$$

Um die wesentlichen Eigenschaften der Lösungen von DGL's 2. Ordnung und den zugehörigen Anfangswertproblemen näher untersuchen zu können, ist der Begriff der *linearen Unabhängigkeit* zweier Funktionen von wesentlicher Bedeutung. Die folgende Definition präzisiert diesen Begriff.

> *Definition*: Lineare Unabhängigkeit
> Zwei Funktionen f und g sind linear abhängig auf einem Intervall $I\subseteq R$, wenn $\exists k_1,k_2\neq 0$:
>
> $$k_1 f(t)+k_2 g(t)=0;\quad \forall t\in I. \tag{2.4}$$
>
> Existieren keine $k_1,k_2\neq 0$, dann sind f und g unabhängig.

Der folgende Satz stellt eine Verbindung her zwischen der linearen Unabhängigkeit zweier Funktionen und der *Wronski- Determinante*.

> *Satz 1*:
> Seien $f,g\in C^1(I\subseteq R)$. Ist $W\ f,g\ (t_0)\neq 0$, für einen beliebigen Punkt $t_0\in I$, so sind f und g linear unabhängig auf I. Umgekehrt gilt, dass wenn f und g auf I linear abhängig sind, dann ist $W\ f,g\ (t)=0;\ \forall t\in I$.

Beweis: Der Beweis gliedert sich in zwei Teile:
Teil 1. Nach Voraussetzung ist $W\ f,g\ (t_0)\neq 0$ für $t_0\in I$. Es werde nun angenommen, dass gilt:

$k_1 f(t) + k_2 g(t) = 0; \quad \forall t \in I$

Für ein beliebiges $t_0 \in I$ gilt demnach:

$$k_1 f(t_0) + k_2 g(t_0) = 0$$
$$k_1 \dot{f}(t_0) + k_2 \dot{g}(t_0) = 0$$

Da nun $W\ f,g\ (t_0)$ genau die Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems ist und nach Voraussetzung $W\ f,g\ (t_0) \neq 0$ ist, ist demnach k_1,k_2=0 die einzige Lösung des Gleichungssystems. Dies ist aber gleichbedeutend mit der linearen Unabhängigkeit von f und g.

Teil 2. Seien f und g linear unabhängig auf I. Ferner werde o. B. d. A. zunächst angenommen, dass $\exists t_0 \in I{:}\, W\ f,g\ (t_0) \neq 0$. Dies bedeutet jedoch nach Teil 1. dass f und g linear unabhängig in t_0 sind, was zu einem Widerspruch führt. Folglich muss bei linearer Abhängigkeit von f und g, die Wronski-Determinante $W\ f,g\ (t) = 0; \ \forall t \in I$ sein.

Zusammenfassung von Teil 1. und Teil 2. ergibt die Behauptung. □

Um die Eigenschaften der Wronski-Determinante zweier linear unabhängiger Lösungen einer DGL 2. Ordnung zu untersuchen ist lediglich die Kenntnis der Gleichung selber notwendig. Das *Abelsche Theorem* liefert eine explizite Formel für die Wronski-Determinante von zwei Lösungen einer solchen DGL.

Abelsches Theorem:
Seien y_1 und y_2 Lösungen der linearem, homogenen DGL 2. Ordnung

$$\ddot{y}(t) + a_1(t)\dot{y}(t) + a_0(t)y(t) = 0,$$

mit $a_1, a_0 \in C^1(I \subseteq R)$, dann ist $W\ y_1, y_2\ (t)$ gegeben durch:

$$W\ y_1, y_2\ (t) = C \exp\left(-\int^t ds\, a_1(s)\right). \tag{2.5}$$

Hierbei ist C eine beliebige Konstante. Das Abelsche Theorem ist ein überraschendes Ergebnis in der Theorie der DGL, zumal es die Wronski-Determinante bis auf eine multiplikative Konstante angibt, ohne dass die Lösungen y_1 und y_2 bekannt sein müssen.

Beweis: Nach Voraussetzung seien y_1 und y_2 Lösungen der allgemeinen, linearen, homogenen DGL 2. Ordnung, so dass gilt:

$$\ddot{y}_1(t) + a_1(t)\dot{y}_1(t) + a_0(t)y_1(t) = 0$$
$$\ddot{y}_2(t) + a_1(t)\dot{y}_2(t) + a_0(t)y_2(t) = 0$$

Multiplikation der oberen Gleichung mit y_2 und der unteren Gleichung mit y_1, sowie anschließende Subtraktion der unteren Gleichung von der oberen Gleichung ergibt:

$$y_2(t)\ddot{y}_1(t) - y_1(t)\ddot{y}_2(t) + a_1(t)\ y_2(t)\dot{y}_1(t) - y_1(t)\dot{y}_2(t)\ = 0$$

Wegen $W\ y_1, y_2\ (t) = y_2(t)\dot{y}_1(t) - y_1(t)\dot{y}_2(t)$ gilt:

$$\frac{d}{dt} W\ y_1, y_2\ (t) + a_1(t) W\ y_1, y_2\ (t) = 0.$$

Multiplikation mit einem zu integrierenden Faktor $\exp\left(\int^t ds\, a_1(s)\right)$ ergibt:

$$\frac{d}{dt}\left\{W\ y_1, y_2\ (t) \exp\left(\int^t ds\, a_1(s)\right)\right\} = 0$$

$$W\ y_1, y_2\ (t) = C \exp\left(-\int^t ds\, a_1(s)\right)$$

Folglich gilt das Abelsche Theorem. □

Da die Exponentialfunktion nie den Wert Null annimmt, ist $W\, y_1, y_2\, (t) \neq 0$, außer für C=0. Häufig ist es notwendig, eine zweite, linear unabhängige Lösung einer DGL zu finden, wenn lediglich eine Lösung bekannt ist. Ein sehr nützliches Verfahren, das sich explizit angeben lässt, ist die so genannte *Reduktion der Ordnung*.

> *Reduktion der Ordnung*:
> Sei y_1 eine Lösung der allgemeinen, linearen, homogenen DGL 2. Ordnung, dann ist die zweite linear unabhängige Lösung gegeben durch:
>
> $$y_2(t) = y_1(t) \int^t ds \frac{W\, y_1, y_2\, (s)}{y_1(s)^{\,2}}. \tag{2.6}$$

Beweis: Der Beweis gliedert sich in zwei Teile:

Teil 1. Nach Voraussetzung ist $y_1(t)$ eine Lösung von

$$\ddot{y}(t) + a_1(t)\dot{y}(t) + a_0(t)y(t) = 0$$
$$\Rightarrow L \circ y(t) = 0$$

Zum Auffinden der zweiten linear unabhängigen Lösung $y_2(t)$ wird der folgende Ansatz gewählt:

$$y(t) = u(t)y_1(t)$$
$$\Rightarrow \dot{y}(t) = \dot{u}(t)y_1(t) + u(t)\dot{y}_1(t)$$
$$\Rightarrow \ddot{y}(t) = \ddot{u}(t)y_1(t) + 2\dot{u}(t)\dot{y}_1(t) + u(t)\ddot{y}_1(t)$$

Einsetzen in die DGL ergibt:

$$L \circ y(t) = \ddot{u}(t)y_1(t) + 2\dot{u}(t)\dot{y}_1(t) + a_1(t)\dot{u}(t)y_1(t) + L \circ y_1(t)$$
$$= \ddot{u}(t)y_1(t) + 2\dot{u}(t)\dot{y}_1(t) + a_1(t)\dot{u}(t)y_1(t)$$

Wegen

$$L \circ y(t) = 0,$$

gilt:

$$\ddot{u}(t) + \left[2\frac{\dot{y}_1(t)}{y_1(t)} + a_1(t)\right]\dot{u}(t) = 0$$
$$\Rightarrow \ddot{u}(t) + \left[\frac{d}{dt}\ln\left(|y_1(t)|^2\right) + a_1(t)\right]\dot{u}(t) = 0$$

Sei nun

$$\dot{u}(t) = v(t),$$

dann gilt:

$$\dot{v}(t) + \left[\frac{d}{dt}\ln\left(|y_1(t)|^2\right) + a_1(t)\right]v(t) = 0$$

Die DGL 1. Ordnung lässt sich lösen durch Multiplikation mit einem zu integrierenden Faktor:

$$\mu(t) = \exp\left(\int^t ds\left(\frac{d}{ds}\ln\left(|y_1(s)|^2\right) + a_1(s)\right)\right)$$
$$= |y_1(t)|^2 \exp\left(\int^t ds a_1(s)\right)$$
$$= |y_1(t)|^2 \left(W\, y_1, y_2\, (t)\right)^{-1}$$

Einsetzen ergibt:

$$\frac{d}{dt}\left\{v(t)|y_1(t)|^2\left(W\ y_1,y_2\ (t)\right)^{-1}\right\}=0$$

$$v(t)|y_1(t)|^2\left(W\ y_1,y_2\ (t)\right)^{-1}=C_2$$

$$v(t)=\frac{C_2}{|y_1(t)|^2}\left(W\ y_1,y_2\ (t)\right)$$

Resubstitution ergibt:

$$\dot{u}(t)=\frac{C_2}{|y_1(t)|^2}W\ y_1,y_2\ (t)$$

$$u(t)=C_2\int^t ds\frac{W\ y_1,y_2\ (s)}{|y_1(s)|^2}+C_1$$

$$y(t)=u(t)y_1(t)$$

$$=C_1y_1(t)+C_2y_1(t)\int^t ds\frac{W\ y_1,y_2\ (s)}{|y_1(s)|^2}$$

Somit lässt sich die zweite linear unabhängige Lösung $y_2(t)$ identifizieren, mit:

$$y_2(t)=y_1(t)\int^t ds\frac{W\ y_1,y_2\ (s)}{|y_1(s)|^2}.$$

Teil 2. Es muss gezeigt werden, dass dies zwei linear unabhängige Lösungen der DGL sind.

$$W\ y_1,y_2\ (t)=y_2(t)\dot{y}_1(t)-y_1(t)\dot{y}_2(t)$$

$$=y_1^2(t)\frac{d}{dt}\left\{\int^t ds\frac{W\ y_1,y_2\ (s)}{|y_1(s)|^2}\right\}+y_1(t)\dot{y}_1(t)\int^t ds\frac{W\ y_1,y_2\ (s)}{|y_1(s)|^2}$$

$$-\dot{y}_1(t)y_1(t)\int^t ds\frac{W\ y_1,y_2\ (s)}{|y_1(s)|^2}$$

$$=W\ y_1,y_2\ (t)$$

$$=C\exp\left(-\int^t ds a_1(s)\right)$$

Aufgrund der Eigenschaft der Exponentialfunktion ist $W\ y_1,y_2\ (t)=0;\ \ \forall t\in I$ und die Lösungen sind linear unabhängig. □

Satz 2:
Seien Y_1 und Y_2 zwei Lösungen der allgemeinen, linearen, inhomogenen DGL 2. Ordnung, dann ist die Differenz Y_1-Y_2 eine Lösung der korrespondierenden homogenen DGL, mit:

$$Y_1(t)-Y_2(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t). \qquad (2.7)$$

Beweis: Nach Voraussetzung sind Y_1 und Y_2 Lösungen von:

$$L\circ y(t):=\ddot{y}(t)+a_1(t)\dot{y}(t)+a_0(t)y(t)=g(t).$$

Folglich gilt:

$$L\circ Y_1(t)=g(t)$$

$$L\circ Y_2(t)=g(t)$$

Daraus folgt:

$$L \circ Y_1(t) - L \circ Y_2(t) = 0.$$

Aus der Linearität von *L* folgt:

$$L \circ \left(Y_1(t) - Y_2(t)\right) = 0.$$

Somit ist Y_1-Y_2 eine Lösung der korrespondierenden homogenen DGL. Da nun die Lösung der allgemeinen, linearen, homogenen DGL 2. Ordnung als eine Linearkombination eines Fundamentalsystems von Lösungen ausgedrückt werden kann, gilt demnach:

$$Y_1(t) - Y_2(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

Folglich gilt die Behauptung. □

> *Satz 3*:
> Die allgemeine Lösung der linearen, inhomogenen DGL 2. Ordnung kann wie folgt ausgedrückt werden:
>
> $$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + Y(t). \tag{2.8}$$

Beweis: Nach Satz 2 gilt:

$$Y_1(t) - Y_2(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

O. B. d. A. sei nun $Y_1(t)=y(t)$ und $Y_2(t)=Y(t)$, dann gilt:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + Y(t)$$

Folglich gilt die Behauptung. □

Der Ausdruck $Y(t)$ wird für gewöhnlich als *partikuläres Integral* oder auch partikuläre Lösung bezeichnet. Bei Kenntnis eines Fundamentalsystems von Lösungen der korrespondierenden homogenen DGL, lässt sich das partikuläre Integral über die *Störfunktion* $g(t)$ auswerten.

> *Satz 4*:
> Das partikuläre Integral ist gegeben durch
>
> $$Y(t) = -y_1(t)\int^t ds \frac{y_2(s)g(s)}{W\left[y_1, y_2\right](s)} + y_2(t)\int^t ds \frac{y_1(s)g(s)}{W\left[y_1, y_2\right](s)}. \tag{2.9}$$

Beweis: Nach Voraussetzung sind $y_1(t)$ und $y_2(t)$ Lösungen der korrespondierenden homogenen DGL. Es sei nun folgender Ansatz gegeben:

$$y(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$$
$$\Rightarrow \dot{y}(t) = \dot{u}_1(t)y_1(t) + \dot{u}_2(t)y_2(t) + u_1(t)\dot{y}_1(t) + u_2(t)\dot{y}_2(t)$$

Es sei nun $\dot{u}_1(t)y_1(t) + \dot{u}_2(t)y_2(t) = 0$, dann gilt:

$$\dot{y}(t) = u_1(t)\dot{y}_1(t) + u_2(t)\dot{y}_2(t)$$
$$\ddot{y}(t) = \dot{u}_1(t)\dot{y}_1(t) + \dot{u}_2(t)\dot{y}_2(t) + u_1(t)\ddot{y}_1(t) + u_2(t)\ddot{y}_2(t)$$

Einsetzen in die DGL ergibt:

$$L \circ y(t) = \dot{u}_1(t)\dot{y}_1(t) + \dot{u}_2(t)\dot{y}_2(t) + u_1(t)L \circ y_1(t) + u_2(t)L \circ y_2(t)$$
$$= \dot{u}_1(t)\dot{y}_1(t) + \dot{u}_2(t)\dot{y}_2(t)$$

Wegen

$$L \circ y(t) = g(t),$$

ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\dot{u}_1(t)y_1(t) + \dot{u}_2(t)y_2(t) = 0$$
$$\dot{u}_1(t)\dot{y}_1(t) + \dot{u}_2(t)\dot{y}_2(t) = g(t)$$

Die Gleichungen bilden ein System von zwei linearen, algebraischen Gleichungen für die Ableitung der unbekannten Funktionen $u_1(t)$ und $u_2(t)$. Anwendung der Cramerschen Regel:

$$\dot{u}_1(t) = -\frac{y_2(t)g(t)}{W\ y_1, y_2\ (t)}$$
$$\dot{u}_2(t) = \frac{y_1(t)g(t)}{W\ y_1, y_2\ (t)}$$

Integration ergibt:

$$u_1(t) = -\int^t ds \frac{y_2(s)g(s)}{W\ y_1, y_2\ (s)}$$
$$u_2(t) = \int^t ds \frac{y_1(s)g(s)}{W\ y_1, y_2\ (s)}$$

Somit gilt:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) - y_1(t)\int^t ds \frac{y_2(s)g(s)}{W\ y_1, y_2\ (s)} + y_2(t)\int^t ds \frac{y_1(s)g(s)}{W\ y_1, y_2\ (s)}.$$

Der letzte Term entspricht dem partikulären Integral und folglich ergibt sich die Behauptung.

□

Beispiel: Serienresonanzkreis mit cosinusförmiger Anregung.

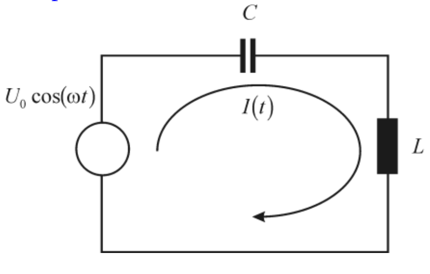

Abb. 1: LC-Kreis mit cosinusförmiger Anregung.

Die Problemstellung lässt sich auf folgende DGL reduzieren:

$$\ddot{Q}(t) + \omega_0^2 Q(t) = \frac{U_0}{L}\cos(\omega t); \quad \text{mit } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Ansatz:

$$Q(t) = e^{\lambda t}$$
$$\ddot{Q}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Einsetzen in die korrespondierende homogene DGL ergibt:

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$$

Die Lösung des homogenen Systems ist demnach:

$$q(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t).$$

Für die Wronski-Determinante gilt:

$$
\begin{aligned}
W\left[q_1,q_2\right](t) &= \begin{vmatrix} \sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \\ \omega_0 \cos(\omega_0 t) & -\omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{vmatrix} \\
&= -\omega_0
\end{aligned}
$$

Demnach gilt für das partikuläre Integral:

$$
\begin{aligned}
Q_p(t) &= -q_1(t)\int^t ds\,\frac{q_2(s)g(s)}{W\left[q_1,q_2\right](s)} + q_2(t)\int^t ds\,\frac{q_1(s)g(s)}{W\left[q_1,q_2\right](s)} \\
&= \frac{U_0}{\omega_0 L}\sin(\omega_0 t)\int^t ds\cos(\omega_0 s)\cos(\omega s) - \frac{U_0}{\omega_0 L}\cos(\omega_0 t)\int^t ds\sin(\omega_0 s)\cos(\omega s) \\
&= \frac{U_0}{L}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\cos(\omega t)
\end{aligned}
$$

Die Anfangsbedingungen sind gegeben durch $Q(0)=0$ und $\dot{Q}(0)=0$. Somit gilt für die Koeffizienten *A* und *B*:

$$
\begin{aligned}
A &= 0 \\
B &= -\frac{U_0}{L}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2} \\
q(t) &= -\frac{U_0}{L}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\cos(\omega_0 t)
\end{aligned}
$$

Folglich gilt:

$$
Q(t) = \frac{U_0}{L}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\left(\cos(\omega t)-\cos(\omega_0 t)\right). \tag{2.10}
$$

Gleichung (2.10) stellt die Summe zweier periodischer Funktionen mit unterschiedlichen Perioden aber gleichen Amplituden dar. Ist die Anregungsfrequenz ω kleiner als die Resonanzfrequenz ω_0, dann ist der hochfrequenten Resonanzschwingung eine niederfrequente Schwingung überlagert. Dieser Bewegungstyp einer Schwingung wird als *Schwebung* bezeichnet.

2.2 DIE LAPLACE-TRANSFORMATION

Ein geeignetes Hilfsmittel bei der Lösung linearer Differentialgleichungen sind die Integraltransformationen. Eine *Integraltransformation* ist allgemein eine Beziehung der Form

$$F(s) = \int_a^b dt g(s,t) f(t), \tag{2.11}$$

wobei die Funktion f mittels einer Integration in eine andere Funktion F transformiert wird. Die Funktion F wird als *Transformierte* von f bezeichnet und die Funktion $g(s, t)$ heißt *Integrationskern* der Transformation.
Die allgemeine Idee hinter der Anwendung von Integraltransformationen besteht darin, ein Problem für f auf ein einfacheres Problem für F zu transformieren, danach das einfachere Problem zu lösen, um dann die gewünschte Funktion f durch ihre Transformierte wiederzuerlangen. In der Regel handelt es sich bei den Problemstellungen um Differentialgleichungen, die mit Hilfe einer Integraltransformation in eine algebraische Gleichung umgewandelt werden. Durch eine entsprechende Rücktransformation ergibt sich dann die Lösung der Differentialgleichung. Eine besonders wichtige Klasse der Integraltransformationen bilden die *Laplace-Transformationen*.

> *Definition*: Laplace-Transformation.
> Sei $f(t)$ eine beliebige Funktion, mit t>0, dann ist die Laplace-Transformierte von $f(t)$ definiert als:
>
> $$L\ f\ (s) := \int_0^{+\infty} dt e^{-st} f(t); \qquad F(s) := L\ f\ (s). \tag{2.12}$$

Beispiel: Laplace-Transformation von $f(t) = \cos(\omega t)$.

$$\begin{aligned}
L\ f\ (t) &= \int_0^{+\infty} dt e^{-st} \cos(\omega t) \\
&= \int_0^{+\infty} dt \frac{d}{dt}\left\{-\frac{1}{s}e^{-st}\right\}\cos(\omega t) \\
&= -\frac{1}{s}e^{-st}\cos(\omega t)\Big|_{t=0}^{+\infty} - \frac{\omega}{s}\int_0^{+\infty} dt e^{-st}\sin(\omega t) \\
&= \frac{1}{s} - \frac{\omega}{s}\int_0^{+\infty} dt \frac{d}{dt}\left\{-\frac{1}{s}e^{-st}\right\}\sin(\omega t) \\
&= \frac{1}{s} - \left(\frac{\omega}{s}\right)^2 \int_0^{+\infty} dt e^{-st}\cos(\omega t) \\
&= \frac{s}{\omega^2 + s^2}
\end{aligned}$$

Folglich gilt:

$$L\ \cos(\omega t)\ (t) = \frac{s}{\omega^2 + s^2}. \tag{2.13}$$

Die Laplace-Transformation von $f(t)$ existiert, wenn das obige Integral für ein s konvergiert, andernfalls existiert sie nicht. Das Existenztheorem macht eine Aussage darüber, ob für eine gegebene Funktion f eine zugehörige Laplace-Transformation existiert oder nicht.

> *Satz 5*: Existenztheorem.
> Sei f stückweise stetig auf dem Intervall $t \in\ 0, A$ und sei $|f(t)| \le ke^{\alpha t}$, für $t \geq M$, mit $k, M \in R^+ \wedge \alpha \in R$, dann $\exists L\ f\ (s) \forall s > \alpha$.

Um das Theorem zu beweisen, genügt es, die Konvergenz der Transformation für $s > \alpha$ zu zeigen.

Beweis: Nach Voraussetzung ist f stückweise stetig auf $t \in\ 0, A$ und es gilt:

$$
\begin{aligned}
L\;f\;(s) &= \int_0^{+\infty} dte^{-st} f(t) \\
&= \int_0^{M} dte^{-st} f(t) + \int_M^{+\infty} dte^{-st} f(t)
\end{aligned}
$$

Das erste Integral existiert aufgrund der stückweisen Stetigkeit von f. Für das zweite Integral gilt:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_M^{+\infty} dte^{-st} f(t)\right| &\leq \int_M^{+\infty} dte^{-st} |f(t)| \\
&\leq \int_M^{+\infty} dte^{-st} ke^{\alpha t} \\
&= k\int_M^{+\infty} dte^{-(s-\alpha)t} \\
&= \frac{ke^{-|s-\alpha|M}}{|s-\alpha|}
\end{aligned}
$$

Der letzte Schritt folgt aus der Voraussetzung $s>\alpha$. Somit gilt die Behauptung. □

Funktionen, die den Bedingungen vom Theorem der Existenz der Laplace-Transformierten genügen, werden als *stückweise stetig* und von exponentieller Ordnung für $t \to +\infty$ bezeichnet.
Es folgen einige wichtige Eigenschaften der Laplace-Transformation.

Satz 6: Linearität der Laplace-Transformation.
Seien f_1 und f_2 Funktionen, für die jeweils eine Laplace-Transformation existiert und seien c_1 und c_2 beliebige Konstanten, dann gilt:

$$L\;c_1 f_1 + c_2 f_2\;(s) = c_1 L\;f_1\;(s) + c_2 L\;f_2\;(s). \qquad (2.14)$$

Die Linearität der Laplace-Transformation ist trivial und folgt sofort aus der Linearität der Integration.

Satz 7: Erster Verschiebungssatz.
Sei $L\;f\;(s) = F(s)$ und $\alpha \in R$, dann gilt:

$$L\;e^{\alpha t} f\;(s) = F(s-\alpha). \qquad (2.15)$$

Der erste Verschiebungssatz folgt explizit aus der Definition der Laplace-Transformation und der Eigenschaft der Exponentialfunktion $e^{\alpha t} \cdot e^{-st} = e^{-(s-\alpha)t}$.

Satz 8: Zweiter Verschiebungssatz.
Sei $L\;f\;(s) = F(s)$ und $g(t) = \theta(t-\alpha) f(t-\alpha)$, dann gilt:

$$L\;g\;(s) = e^{-\alpha s} F(s). \qquad (2.16)$$

Beweis: Nach Voraussetzung gilt:

$$
\begin{aligned}
L\;g\;(s) &= \int_0^{+\infty} dte^{-st} g(t) \\
&= \int_\alpha^{+\infty} dte^{-st} f(t-\alpha) \\
&= e^{-s\alpha} \int_0^{+\infty} dve^{-sv} f(v) \\
&= e^{-s\alpha} F(s)
\end{aligned}
$$

Folglich gilt die Behauptung. □

Satz 9: Streckungssatz
Sei $L\{f\}(s) = F(s)$, dann gilt:

$$L\{f(\alpha t)\}(s) = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{s}{\alpha}\right). \tag{2.17}$$

Beweis: Nach Voraussetzung gilt:

$$\begin{aligned} L\{f(\alpha t)\}(s) &= \int_0^{+\infty} dt e^{-st} f(\alpha t) \\ &= \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} dt e^{-\frac{s}{\alpha}t} f(t) \\ &= \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{s}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

Folglich gilt die Behauptung. □

Satz 10: Transformation einer periodischen Funktion.
Eine Funktion *f* habe die Periode $\tau>0$, dann gilt:

$$L\{f\}(s) = \frac{1}{1-e^{-s\tau}}\int_0^{\tau} dt e^{-st} f(t). \tag{2.18}$$

Beweis: Nach Voraussetzung ist *f* periodisch in *t* mit der Periode τ, so dass $f(t)=f(t+n\tau)$, mit gilt. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} L\{f\}(s) &= \int_0^{+\infty} dt e^{-st} f(t) \\ &= \int_0^{\tau} dt e^{-st} f(t) + \int_{\tau}^{2\tau} dt e^{-st} f(t) + \ldots + \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} dt e^{-st} f(t) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} dt e^{-st} f(t) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\tau} d\nu e^{-s(n\tau+\nu)} f(n\tau+\nu) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-ns\tau}\int_0^{\tau} d\nu e^{-s\nu} f(\nu) \\ &= \frac{1}{1-e^{-s\tau}}\int_0^{\tau} d\nu e^{-s\nu} f(\nu) \end{aligned}$$

Folglich gilt die Behauptung. □

Bei der Lösung von Anfangswertproblemen sind die Sätze über die Laplace-Transformationen der Ableitungen von Funktionen bzw. über Integrale von Funktionen von großer Bedeutung.

Satz 11: Ableitungssatz
Sei $L\{f\}(s) = F(s)$, dann gilt:

$$L\{\dot{f}\}(s) = sF(s) - f(0). \tag{2.19}$$

Beweis: Nach Voraussetzung gilt:

$$\begin{aligned} L\{\dot{f}\}(s) &= \int_0^{+\infty} dt e^{-st} \dot{f}(t) \\ &= e^{-st} f(t)\Big|_{t=0}^{+\infty} - \int_0^{+\infty} dt \frac{d}{dt}\left\{e^{-st}\right\} f(t) \\ &= -f(0) + s\int_0^{+\infty} dt e^{-st} f(t) \\ &= -f(0) + sF(s) \end{aligned}$$

Folglich gilt die Behauptung. □

Ganz analog lässt sich zeigen, dass für die Laplace-Transformation einer zweifachen Ableitung gilt:

$$L\ \ddot{f}\ (s) = s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0). \tag{2.20}$$

Im Prinzip lässt sich auch die Laplace-Transformation einer n-fachen Ableitung angeben. Für die meisten Problemstellungen in der Physik und Technik ist die Kenntnis der Laplace-Transformationen der ersten und zweiten Ableitung jedoch vollkommen ausreichend.
Neben den Ableitungssätzen ist auch die Laplace-Transformation von Integralen wichtig.

Satz 12: Integralsatz
Sei $L\ f\ (s) = F(s)$, dann gilt:

$$L\ \int_0^t d\nu f(\nu)\ (s) = \frac{F(s)}{s}. \tag{2.21}$$

Beweis: Nach Voraussetzung gilt:

$$\begin{aligned}
L\ \int_0^t d\nu f(\nu)\ (s) &= \int_0^{+\infty} dt e^{-st} \int_0^t d\nu f(\nu) \\
&= \int_0^{+\infty} dt \frac{d}{dt}\left\{-\frac{1}{s} e^{-st}\right\} \int_0^t d\nu f(\nu) \\
&= \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} dt e^{-st} \frac{d}{dt}\left\{\int_0^t d\nu f(\nu)\right\} \\
&= \frac{F(s)}{s}
\end{aligned}$$

Folglich gilt die Behauptung. □

Satz 13: Komplexe Inversionsformel.
Sei $L\ f\ (s) = F(s)$, dann gilt für die Umkehrung der Laplace-Transformation:

$$L^{-1}\ F\ (t) = \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} \frac{ds}{2\pi i} e^{st} F(s). \tag{2.22}$$

Beispiel: Serienresonanzkreis mit Anregung.

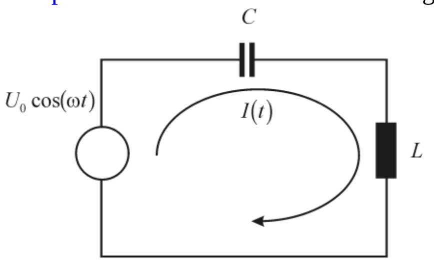

Abb. 2: LC-Kreis mit cosinusförmiger Anregung.

Die Problemstellung lässt sich auf folgende DGL reduzieren:

$$\ddot{Q}(t) + \omega_0^2 Q(t) = \frac{U_0}{L}\cos(\omega t); \quad \text{mit } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Lösung durch Laplace-Transformation:

$$L\ Q\ (s) = \tilde{Q}(s)$$
$$L\ \dot{Q}\ (s) = s\tilde{Q}(s) - Q(0)$$
$$L\ \cos(\omega t)\ (s) = \frac{s}{\omega^2 + s^2}$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt:

$$s^2\tilde{Q}(s) - sQ(0) - \dot{Q}(0) + \omega_0^2\tilde{Q}(s) = \frac{U_0}{L}\frac{s}{\omega^2 + s^2}.$$

Die Anfangsbedingungen sind gegeben durch $Q(0) = 0$ und $\dot{Q}(0) = 0$. Somit gilt:

$$s^2\tilde{Q}(s) + \omega_0^2\tilde{Q}(s) = \frac{U_0}{L}\frac{s}{\omega^2 + s^2}.$$

Umstellen der Gleichung nach der *Spektralfunktion* ergibt:

$$\tilde{Q}(s) = \frac{U_0}{L}\frac{s}{\omega^2 + s^2}\frac{1}{\omega_0^2 + s^2}.$$

Zwecks Rücktransformation ist es sinnvoll die Spektralfunktion in eine Summe umzuwandeln. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}(s) &= \frac{U_0}{L}\frac{s}{\omega^2 + s^2}\frac{1}{\omega_0^2 + s^2} \\
&= \frac{U_0}{L}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\frac{s}{\omega^2 + s^2} - \frac{U_0}{L}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\frac{s}{\omega_0^2 + s^2} \\
&= \frac{U_0}{L}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(\frac{s}{\omega^2 + s^2} - \frac{s}{\omega_0^2 + s^2}\right)
\end{aligned}$$

Folglich gilt:

$$\begin{aligned}
Q(t) &= L^{-1}\ \tilde{Q}\ (t) \\
&= \frac{U_0}{L}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(\int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty}\frac{ds}{2\pi i}e^{st}\frac{s}{\omega^2 + s^2} - \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty}\frac{ds}{2\pi i}e^{st}\frac{s}{\omega_0^2 + s^2}\right) \\
&= \frac{U_0}{L}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)\right)
\end{aligned}$$

Das Ergebnis ist wie zu erwarten identisch wie das in Gl. (2.10). Der mathematische Aufwand zur Lösung des Anfangswertproblems ist jedoch bei der Verwendung der Laplace-Transformation wesentlich kleiner.

Fakultativer Abschnitt: Auswertung der komplexen Inversionsformel mit Hilfe des *Residuensatzes*.
In vielen Fällen ist eine einfache Inversion der Spektralfunktion nicht mehr möglich. Eine Rücktransformation lässt sich dann nur noch über die komplexe Inversionsformel durchführen. Das folgende Beispiel illustriert die Vorgehensweise.
Gegeben sei die Spektralfunktion:

$$\tilde{Q}(s) = \frac{s}{\omega^2 + s^2}.$$

Die Inversion ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
Q(t) &= \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty}\frac{ds}{2\pi i}e^{st}\tilde{Q}(s) \\
&= \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty}\frac{ds}{2\pi i}e^{st}\frac{s}{\omega^2 + s^2}
\end{aligned}$$

Der Integrand besitzt Polstellen in $s=\pm i\omega$. Durch Integration über eine *Bromwich-Kurve* lässt sich das Integral unter Verwendung des *Residuensatzes* auswerten.

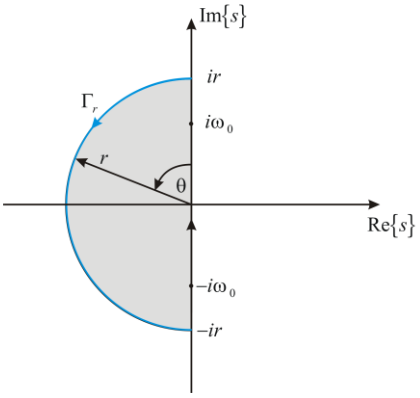

Abb.3: Zum Integrationsbereich bei der Inversion.

Zerlegung des Kurvenintegrals:

$$\oint_C \frac{ds}{2\pi i} e^{st} \frac{s}{\omega^2+s^2} = \int_{s_0-ir}^{s_0+ir} \frac{ds}{2\pi i} e^{st} \frac{s}{\omega^2+s^2} + \int_{\Gamma_r} \frac{ds}{2\pi i} e^{st} \frac{s}{\omega^2+s^2} \cdot$$

Hierbei ist C die Kurve, die den gesamten Bereich mit den Polstellen umrandet. Diese lässt sich zerlegen in eine Gerade von $-ir$ bis $+ir$ und einem sich anschließenden Halbkreis Γ_r mit dem Radius r. Beim Grenzübergang $r\to\infty$ geht das Integral über die Strecke $[-ir,+ir]$ in die komplexe Inversionsformel über. Um den Anspruch auf Vollständigkeit zu erfüllen ist es allerdings auch erforderlich zu zeigen, dass das Integral über den Halbkreis Γ_r für $r\to\infty$ verschwindet. Das Kurvenintegral auf der linken Seite der Gleichung lässt sich mit Hilfe des *Residuensatzes* auswerten:

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{ds}{2\pi i} e^{st} \frac{s}{\omega^2+s^2} &= \sum \operatorname{Res}\left\{ e^{st} \frac{s}{\omega^2+s^2} \right\}\Bigg|_{s=i\omega;s=-i\omega} \\
&= \lim_{s\to i\omega}(s-i\omega)\frac{se^{st}}{(s-i\omega)(s+i\omega)} + \lim_{s\to -i\omega}(s+i\omega)\frac{se^{st}}{(s-i\omega)(s+i\omega)} \\
&= \frac{i\omega e^{i\omega t}}{2i\omega} + \frac{-i\omega e^{-i\omega t}}{-2i\omega} \\
&= \frac{1}{2}e^{i\omega t} + \frac{1}{2}e^{-i\omega t} \\
&= \cos(\omega t)
\end{aligned}$$

Um den linken Teil der Gleichung mit der komplexen Inversionsformel gleichsetzen zu können, muss $r\to\infty$ streben. Es gilt dann:

$$\int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} e^{st} \frac{s}{\omega^2+s^2} + \lim_{r\to\infty} \int_{\Gamma_r} \frac{ds}{2\pi i} e^{st} \frac{s}{\omega^2+s^2} = \cos(\omega t) \cdot$$

Es bleibt zu zeigen, dass das Integral über den Halbkreis Γ_r für $r\to\infty$ verschwindet.
Es gilt:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Gamma_r} \frac{ds}{2\pi i} e^{st} \frac{s}{\omega^2+s^2} \right| &\le \int_{\Gamma_r} \left| \frac{ds}{2\pi i} \right| \left| e^{st} \frac{s}{\omega^2+s^2} \right| \\
&\le \frac{r}{2\pi} \int_0^{\pi} d\theta \left| e^{irte^{i\theta}} \right| \left| \frac{ire^{i\theta}}{\omega^2+r^2} \right| \\
&\le \frac{1}{2\pi} \frac{r^2}{\omega^2+r^2} \int_0^{\pi} d\theta \left| e^{irt(\cos\theta + i\sin\theta)} \right| \left| ie^{i\theta} \right| \\
&\le \frac{1}{2\pi} \frac{r^2}{\omega^2+r^2} \int_0^{\pi} d\theta e^{-rt\sin\theta}
\end{aligned}$$

Hierbei wurde im zweiten Schritt der Übergang zu Polarkoordinaten $s=ire^{i\theta}$ vollzogen. Offensichtlich gilt:

$$\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta \ \ ; \text{ für } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

und

$$\sin\theta \geq 2 - \frac{2}{\pi}\theta \ \ ; \text{ für } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Die folgende *Abb*.4 veranschaulicht den Sachverhalt.

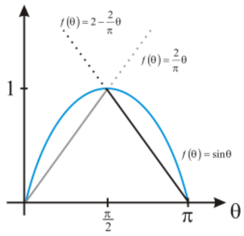

Abb.4: Zur Abschätzung der Sinus-Funktion.

Folglich gilt:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Gamma_r} \frac{ds}{2\pi i} e^{st} \frac{s}{\omega^2 + s^2}\right| &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{r^2}{\omega^2 + r^2} \int_0^\pi d\theta e^{-rt\sin\theta} \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{r^2}{\omega^2 + r^2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta e^{-rt\sin\theta} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta e^{-rt\sin\theta} \right) \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \frac{r^2}{\omega^2 + r^2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta e^{-rt\frac{2}{\pi}\theta} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta e^{-rt\left(2-\frac{2}{\pi}\theta\right)} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{r^2}{\omega^2 + r^2} \left(-\frac{1}{rt} e^{-rt\frac{2}{\pi}\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{rt} e^{-rt\left(2-\frac{2}{\pi}\theta\right)}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) \\
&= \frac{1}{\pi t} \frac{r}{\omega^2 + r^2} \left(1 - e^{-rt}\right)
\end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\pi t} \frac{r}{\omega^2 + r^2} \left(1 - e^{-rt}\right) = 0,$$

folgt aus dem *Einschlußkriterium*:

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\Gamma_r} \frac{ds}{2\pi i} e^{st} \frac{s}{\omega^2 + s^2} = 0.$$

Folglich gilt:

$$\boxed{\int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} \frac{ds}{2\pi i} e^{st} \frac{s}{\omega^2 + s^2} = \cos(\omega t).}$$