3.1 GRUNDLAGEN ZUR THEORIE ELEKTRISCHER NETZWERKE

Grundsätzlich besteht ein Schaltkreis oder ein elektrisches Netzwerk aus in reihe, oder parallel geschalteten Kombinationen zweipoliger Elemente. Um Vorhersagen über das Verhalten des Netzwerks treffen zu können, ist eine Analyse des Schaltkreises erforderlich. Hierzu ist zunächst eine Klassifizierung der Netzwerkkomponenten in *aktive Elemente* und *passive Elemente* zweckdienlich. Beispiele für aktive Elemente sind Spannungs–– oder Stromquellen, aber auch Schalter jeglicher Art (Relais, Transistor, Thyratron, etc.). Zu den passiven Elementen zählen Widerstände, Induktivitäten und Kondensatoren.

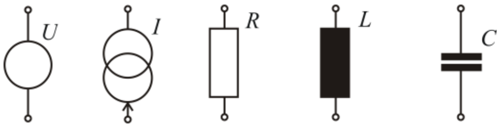
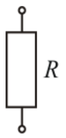


Abb. 1: Schaltsymbole der wichtigsten aktiven- und passiven Elemente. Hierzu zählen die Spannungsquelle U, die Stromquelle I, der ohmsche Widerstand R, die Induktivität L und der Kondensator bzw. die Kapazität C.

Die in der Elektronik übliche Vorzeichenkonvention besagt, dass der elektrische Strom in einer Leiterschleife vom Pluspol der Quelle hin zum Minuspol verläuft. Eine Kombination aus aktiven und passiven Bauelementen wird *Schaltbild* genannt. Hierbei sind die passiven Schaltungselemente wie Widerstand, Induktivität und Kapazität üblicherweise nach der Art der Strom-Spannungs-Beziehungen, die für das betreffende Bauelement gelten definiert. In der folgenden Tabelle ist eine Übersicht gegeben über die passiven Bauelemente, den zugehörigen physikalischen Einheiten und den Beziehungen zwischen den physikalischen Größen wie Strom und Spannung.

Tab. I: Passive Bauelemente und deren physikalische Einheiten.

Netzwerkelement	Einheit	Spannung	Strom
	Ohm [Ω]	$U = RI$ Ohmsches Gesetz	$I = \frac{U}{R}$
	Henry [H]	$U = L\dot{I}$ Faradaysches Gesetz	$I = \frac{1}{L}\int dtU + const.$
	Farad [F]	$U = \frac{1}{C}\int dtI + const.$	$I = C\dot{U}$ Ampère-Maxwell-Gesetz

Prinzipiell folgen die Beziehungen zwischen Stromstärke und Spannungsabfall an Induktivitäten und Kapazitäten aus den Maxwellschen Gleichungen, während das Ohmsche Gesetz für Widerstände eine separate Gesetzmäßigkeit ist und als zusätzliche Annahme zu den Maxwellschen Gleichungen herangezogen werden muss, um den elektrischen Strom in makroskopischer Materie beschreiben zu können.

Ohmsche Widerstände sind Bauelemente, die einer Strom- bzw. Spannungsquelle Energie entnehmen und an die Umgebung, meistens in Form von Wärme, dissipieren. Die Leistung in einem Widerstand ist demnach immer positiv und gegeben durch den Ausdruck:

$$\dot{W}_R = RI^2 . \tag{3.1}$$

Elektrische Geräte, die in irgendeiner Form Energie umwandeln, müssen stets ohmsche Widerstände in ihren Schaltbildern enthalten. In der Elektrotechnik und Elektronik wird die in einem ohmschen Widerstand dissipierte Leistung auch *Wirkleistung* genannt.

Induktivitäten sind Bauelemente, die über ein sich aufbauendes magnetisches Feld Energie speichern und über ein sich abbauendes Magnetfeld diese Energie wieder an ein elektrisches Netzwerk abgeben können. Unter technischen Induktivitäten versteht man meistens Drahtspulen mit mehreren Windungen, die in Elektromotoren, Transformatoren, Schwingkreisen und Drosseln zum Einsatz kommen. Große Induktivitäten können bei entsprechenden Stromstärken beträchtliche Magnetfelder von mehr als 1 Tesla aufbauen. Die Leistung in einer Induktivität ist gegeben durch den Ausdruck:

$$\dot{W}_L = LI\dot{I}\,. \tag{3.2}$$

Aufgrund der Tatsache, dass das sich abbauende Magnetfeld die in der Induktivität gespeicherte Energie wieder an das System abgibt, verschwindet die zeitlich gemittelte Leistung. Man spricht dann von einer *Blindleistung*.

Beispiel: Gegeben sei eine Induktivität L durch die ein sinusförmiger Strom mit der Kreisfrequenz ω und der Spitzenamplitude I_0 fließt. Es gilt:

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0 \sin(\omega t) \\ \dot{I}(t) &= \omega I_0 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Die Blindleistung ist dann gegeben durch:

$$\dot{W}_L = \omega I_0^2 L \sin(\omega t)\cos(\omega t)$$

Die über eine Periode $\tau = 2\pi/\omega$ gemittelte Leistung ist:

$$\begin{aligned} \left\langle \dot{W}_L \right\rangle &= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \dot{W}_L(t) \\ &= \omega L I_0^2 \frac{1}{\tau}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt \sin(\omega t)\cos(\omega t) \\ &= \omega L I_0^2 \frac{1}{\tau}\left\{\frac{1}{2\omega}\sin^2(\omega t)\right\}\Bigg|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Eine ideale Induktivität dissipiert demnach keine Wirkleistung. Die hier auftretende Größe ωL hat die Dimension eines Widerstands und definiert den so genannten *Blindwiderstand* einer Induktivität bei periodischem Wechselstrom.

Kapazitäten sind Netzwerkelemente, die über ein sich aufbauendes elektrisches Feld Energie speichern und über ein sich abbauendes elektrisches Feld diese Energie wieder abgeben. Kapazitäten treten in elektrischen Schaltkreisen als temporäre Energiespeicher in Erscheinung oder dienen zur galvanischen Entkopplung zweier Netzwerke. Die Leistung im Kondensator ist durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$\dot{W}_C = CU\dot{U}\,. \tag{3.3}$$

In enger Analogie zur Induktivität verschwindet die über eine Periode gemittelte Leistung, so dass man auch hier von einer Blindleistung spricht.

Beispiel: Gegeben sei eine Kapazität C an die eine sinusförmige Spannung mit der Kreisfrequenz ω und der Spitzenamplitude U_0 anliegt. Es gilt:

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0 \sin(\omega t) \\ \dot{U}(t) &= \omega U_0 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Die Blindleistung ist dann gegeben durch:

$$\dot{W}_L = \omega C U_0^2 \sin(\omega t)\cos(\omega t)$$

Die über eine Periode $\tau = 2\pi/\omega$ gemittelte Leistung ist:

$$\begin{aligned}\langle \dot{W}_L \rangle &= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \dot{W}_L(t) \\ &= \omega C U_0^2 \frac{1}{\tau}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt \sin(\omega t)\cos(\omega t) \\ &= \omega C U_0^2 \frac{1}{\tau}\left\{\frac{1}{2\omega}\sin^2(\omega t)\right\}\Bigg|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \\ &= 0\end{aligned}$$

Eine ideale Kapazität dissipiert demnach keine Wirkleistung. Der Kehrwert der hier auftretende Größe ωC hat die Dimension eines Widerstands und definiert den so genannten Blindwiderstand einer Kapazität bei periodischem Wechselstrom.
Zur Beschreibung der Ströme in einem Netzwerk gibt es zwei fundamentale Gesetzmäßigkeiten, die prinzipiell aus dem Poyntingschen Theorem und der Ladungserhaltung folgen. Die beiden Sätze sind als *Kirchhoffsche Maschenregel* und *Kirchhoffsche Knotenregel* bekannt.

> *Kirchhoffsche Maschenregel*:
> Die Kirchhoffsche Maschenregel besagt, dass für jeden geschlossenen Pfad eines Netzwerks die algebraische Summe der einzelnen Spannungen verschwindet.
> $$\sum_k U_k = 0 \cdot \qquad (3.4)$$

Es spielt dabei keine Rolle, ob es sich um aktive Spannungsquellen handelt, oder passive Bauelemente an denen bei einem entsprechenden Stromfluss eine Spannung abfällt.

Beispiel: Gegeben sei eine einfache Masche, bestehend aus den Widerständen R_1, R_2 und R_3, sowie den Spannungsquellen U_a und U_b.

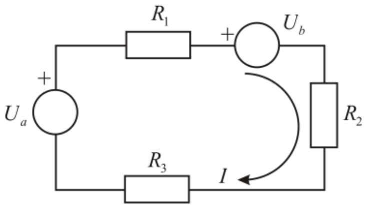


Abb. 2: Einfache Masche.

Gemäß der Kirchhoffschen Maschenregel gilt:

$$-U_a + R_1 I + U_b + R_2 I + R_3 I = 0 \cdot$$

Umformen ergibt:

$$U_b + (R_1 + R_2 + R_3) I = U_a$$
$$\Rightarrow I = \frac{U_a - U_b}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Für den Fall U_a=U_b fließt demnach kein Strom im Kreis. Ist U_a<U_b, dann erfolgt der Stromfluss in umgekehrter Richtung.

Werden zwei oder mehrere Netzwerke miteinander verbunden, dann entsteht eine Verbindungsstelle, die *Knoten* genannt wird. Hier können sich die im Netzwerk fließenden Ströme verzweigen. Der Sachverhalt wird durch die *Kirchhoffsche Knotenregel* quantifiziert.

> *Kirchhoffsche Knotenregel*:
> Die algebraische Summe der in einen Knotenpunkt hineinfließenden Ströme ist gleich der Summe der aus dem Knotenpunkt herausfließenden Ströme:
> $$\sum_k I_{ek} = \sum_n I_{an} \cdot \qquad (3.5)$$

In der Kirchhoffschen Maschenregel manifestiert sich die Energieerhaltung, während die Kirchhoffsche Knotenregel die Ladungserhaltung widerspiegelt. Energie- und Ladungserhaltung machen auch Aussagen darüber, wie Widerstände bei der *Reihenschaltung* bzw. *Parallelschaltung* addiert werden müssen.
Ein *Spannungsteiler* ist eine Anordnung von zwei oder mehreren in Reihe geschalteten Widerständen. Die abfallende Gesamtspannung und die aufgenommene Leistung teilen sich im Verhältnis der Widerstände auf. Es gilt:

$$R_{ges} = \sum_k R_k \cdot \tag{3.6}$$

Bei der Parallelschaltung von Widerständen addieren sich die Leitwerte der Stromzweige und demnach der Kehrwert der Einzelwiderstände. Es gilt:

$$\frac{1}{R_{ges}} = \sum_k \frac{1}{R_k} \cdot \tag{3.7}$$

Ein lineares Netzwerk, das zwei oder mehr starre Quellen enthält, kann auf seine verschiedenen Spannungen und Zweigströme hin untersucht werden, indem man jeweils nur eine Quelle wirken lässt, und dann die Ergebnisse Überlagert.

> *Überlagerungssatz*:
> Die Ströme in den Zweigen eines linearen Netzwerks mit beliebig vielen Quellspannungen sind gleich der Summe der Teilströme, die durch die einzelnen Quellspannungen hervorgerufen werden.

Spannungsquellen die während des Wirkens anderer Quellen außer Acht bleiben sollen, werden durch Kurzschlussbrücken ersetzt. Stromquellen werden durch einen Leerlauf bzw. offene Klemmen ersetzt.

Beispiel: Gegeben sei ein Netzwerk bestehend aus einer Spannungsquelle U_a und einer Stromquelle I_b.

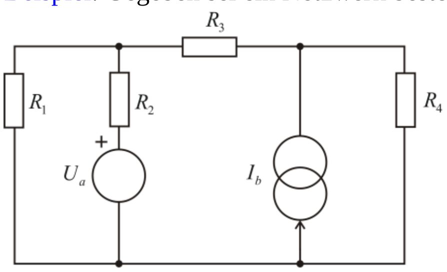


Abb. 3: Zum Überlagerungssatz.

Die einzelnen Werte seien wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} R_1 &= 27\Omega \\ R_2 &= 47\Omega \\ R_3 &= 4\Omega \\ R_4 &= 23\Omega \\ U_a &= 200V \\ I_b &= 20A \end{aligned}$$

Es soll mit Hilfe des Überlagerungssatzes der Strom I durch den Widerstand R_4 ermittelt werden. Zunächst wird die Stromquelle bei der Analyse nicht weiter berücksichtigt und durch zwei offene Klemmen ersetzt. Es gilt dann:

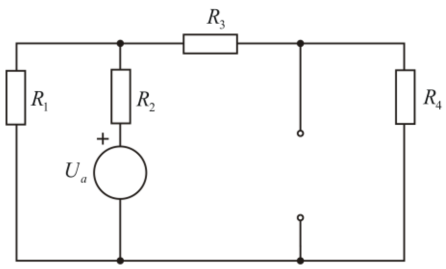


Abb. 4: Ursprüngliche Schaltung ohne das Wirken der Stromquelle.

Die Widerstände R_1 und R_3+R_4 liegen parallel zueinander. Es ergibt sich somit:

$$\begin{aligned}R_{134} &= \frac{R_1(R_3+R_4)}{R_1+R_3+R_4} \\ &= 13{,}5\Omega\end{aligned}$$

Der Widerstand R_{134} liegt wiederum in Reihe mit R_2, so dass sich folgender Gesamtwiderstand ergibt:

$$\begin{aligned}R_g &= R_{134} + R_2 \\ &= 60{,}5\Omega\end{aligned}$$

Mit der gegebenen Spannung U_a ergibt sich der Gesamtstrom zu:

$$\begin{aligned}I_g &= \frac{U_a}{R_g} \\ &= 3{,}3A\end{aligned}$$

Durch den Widerstand R_4 fließt demnach:

$$\begin{aligned}I_4' &= \frac{U_a - I_g R_2}{R_3+R_4} \\ &= 1{,}7A\end{aligned}$$

Als nächstes wird das Netzwerk lediglich mit der aktiven Stromquelle analysiert. Die Spannungsquelle wird dabei durch eine Kurzschlussklemme ersetzt.

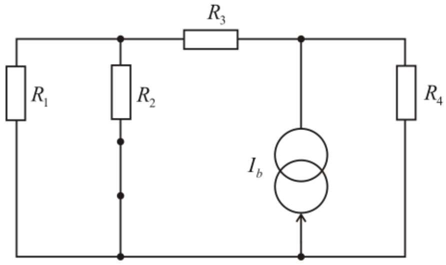


Abb. 5: Ursprüngliche Schaltung ohne das Wirken der Spannungsquelle.

Der gesamte Widerstand des Netzwerks ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}R_{123} &= R_3 + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \\ &= 21{,}1\Omega \\ R_g &= \frac{R_{123}R_4}{R_{123}+R_4} \\ &= 11{,}0\Omega\end{aligned}$$

Demnach fällt an der Stromquelle die folgende Spannung ab:

$$\begin{aligned} U_b &= I_b R_g \\ &= 220{,}0V \end{aligned}$$

Der Strom durch R_4 ist demnach:

$$\begin{aligned} I_4'' &= \frac{U_b}{R_4} \\ &= 9{,}6A \end{aligned}$$

Aus dem Überlagerungssatz folgt nun der Gesamtstrom durch R_4 als Summe der Beiträge der einzelnen Quellen, mit:

$$\begin{aligned} I_4 &= I_4' + I_4'' \\ &= 11{,}3A \end{aligned}$$

Der Beitrag der Spannungsquelle U_a am Gesamtstrom durch R_4 ist offensichtlich kleiner als der der Stromquelle.

Die Analyse von Netzwerken aus Widerständen und Spannungsquellen kann sehr mühselig sein. Dies trifft insbesondere dann zu, wenn der Komplexitätsgrad der Netzwerke zunimmt. Für solche Untersuchungen sind das *Thévenin-Theorem* und das *Norton-Theorem* sehr hilfreich.

> *Thévenin-Theorem*:
> Zwei beliebige Punkte A und B eines linearen Netzes, das eine beliebige Anzahl von Quellspannungen enthält, lässt sich zur Analyse durch eine Spannungsquelle *U*' mit einem Widerstand *R*' ersetzen.

Die zugehörige Spannung heißt *Thévenin-Äquivalenzspannung*. Werden die Punkte A und B kurzgeschlossen, dann fließt ein Strom und das lineare Netzwerk lässt sich demnach auch durch eine Stromquelle mit einem parallel geschalteten Widerstand ersetzen.

> *Norton-Theorem*:
> Zwei beliebige Punkte A und B eines linearen Netzes, das eine beliebige Anzahl von Stromquellen enthält, lässt sich zur Analyse durch eine Stromquelle *I*' mit einem Parallelwiderstand *R*' ersetzen.

Der zugehörige Strom heißt *Norton-Äquivalenzstrom*. Der Widerstand *R*' wird stets als *Innenwiderstand* oder *Quellenwiderstand* bezeichnet. Die Beschreibung eines Netzwerks mit Hilfe einer Thévenin-Äquivalenzspannungsquelle ist besonders bei sich anschließenden Reihenschaltungen von Vorteil. Für Parallelschaltungen wählt man dagegen die Darstellungsweise mit Hilfe des Norton-Äquivalenzstroms. Beide Größen hängen über das Ohmsche Gesetz

$$U' = R'I', \tag{3.8}$$

zusammen.

Beispiel: Es ist für folgendes Netzwerk die Äquivalenzschaltung nach Thévenin und Norton zu entwickeln:

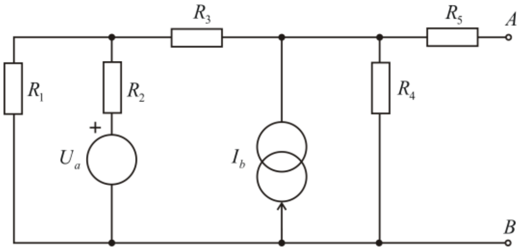


Abb. 6: Zum Thévenin-Theorem.

Die einzelnen Werte seien wie folgt gegeben:

$$R_1 = 27\Omega$$
$$R_2 = 47\Omega$$
$$R_3 = 4\Omega$$
$$R_4 = 23\Omega$$
$$R_5 = 10\Omega$$
$$U_a = 200V$$
$$I_b = 20A$$

Es soll die Thévenin-Äquivalenzspannung des Netzwerks zwischen den Punkten A und B ermittelt werden.
Aus dem vorherigen Beispiel zum Überlagerungssatz lässt sich der Spannungsabfall über dem Widerstand R_4 sofort berechnen. Es gilt:

$$\begin{aligned} U_4 &= I_4 R_4 \\ &= 11{,}3A \cdot 23\Omega \\ &= 260V \end{aligned}$$

Dies ist auch die Thévenin-Äquivalenzspannung, weil in diesem Fall durch R_5 kein Strom fließt.

$$U' = 260V$$

Zur Analyse des Norton-Äquivalenzstroms liegt folgendes Netzwerk vor:

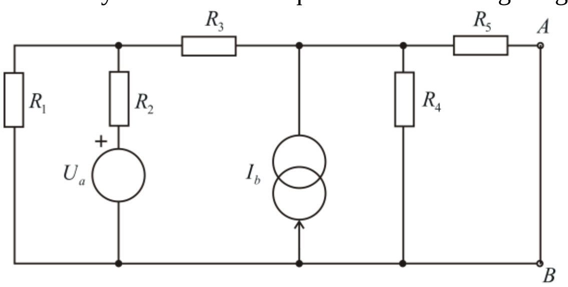


Abb. 7: Zur Analyse des Norton-Äquivalenzstroms.

Der Norton Äquivalenzstrom fließt durch R_5. Es ist demnach in der ursprünglichen Netzwerkstruktur noch der zu R_4 parallel geschaltete Widerstand R_5 zu berücksichtigen. Es lässt sich wieder der Überlagerungssatz anwenden. Wird lediglich die Spannungsquelle berücksichtigt, dann gilt:

Die Widerstände R_1 und R_3+R_{45} liegen parallel zueinander. Es ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} R_{45} &= \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} \\ &= 7\Omega \\ R_{134} &= \frac{R_1(R_3 + R_{45})}{R_1 + R_3 + R_{45}} \\ &= 7{,}8\Omega \end{aligned}$$

Der Widerstand R_{134} liegt wiederum in Reihe mit R_2, so dass sich folgender Gesamtwiderstand ergibt:

$$\begin{aligned} R_g &= R_{134} + R_2 \\ &= 54{,}8\Omega \end{aligned}$$

Mit der gegebenen Spannung U_a ergibt sich der Gesamtstrom zu:

$$I_g = \frac{U_a}{R_g}$$
$$= 3{,}7\,A$$

Durch den Zweig mit den Widerständen R_3, R_4 und R_5 fließt demnach:

$$I_{345} = I_g - \frac{U_a - I_g R_2}{R_1}$$
$$= 2{,}7\,A$$

Durch R_5 fließt demnach:

$$I_5' = I_{345} \frac{R_4}{R_4 + R_5}$$
$$= 1{,}9\,A$$

Wird nur das Wirken der Stromquelle berücksichtigt, dann gilt:

$$R_{123} = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$
$$= 21{,}1\Omega$$

$$R_g = \frac{R_{123} R_4 \frac{R_5}{R_4 + R_5}}{R_{123} + R_4 \frac{R_5}{R_4 + R_5}}$$
$$= 5{,}2\Omega$$

Demnach fällt an der Stromquelle die folgende Spannung ab:

$$U_b = I_b R_g$$
$$= 104V$$

Der Strom durch R_5 ist demnach:

$$I_5'' = \frac{U_b}{R_5}$$
$$= 10{,}4\,A$$

Aus dem Überlagerungssatz ergibt sich schließlich der Norton-Äquivalenzstrom:

$$I' = I_5' + I_5''$$
$$= 12{,}3A$$

Der Innenwiderstand ist nun trivial:

$$R' = \frac{U'}{I'}$$
$$= 21{,}1\Omega$$