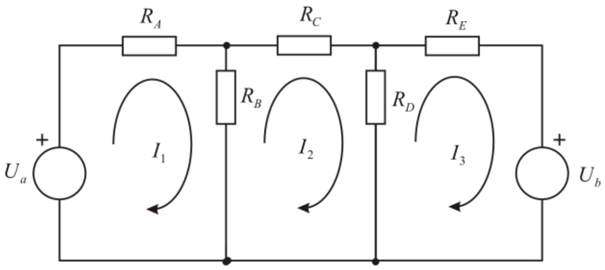
3.2 MASCHEN- UND KNOTENANALYSE IN NETZWERKEN

Für ein aktives Netzwerk mit beispielsweise drei Zweigen, ergibt sich eine Lösung für die Zweigströme I_1, I_2 und I_3, indem man die Kirchhoffschen Regeln für die Hauptknoten anwendet und die Spannungen paralleler Zweige gleichsetzt. Generell können für ein n-maschiges Netzwerk n abhängige Gleichungen in Matrixform angegeben werden.

Beispiel: Gegeben sei das folgende 3-maschige Netzwerk:



Anwendung der Kirchhoffschen Maschenregel ergibt das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} (R_A+R_B)I_1 \quad -R_B I_2 \qquad\qquad &= U_a \\ -R_B I_1 \quad (R_B+R_C+R_D)I_2 \quad -R_D I_3 &= 0 \\ -R_D I_2 \quad (R_D+R_E)I_3 &= -U_b \end{aligned} \tag{3.9}$$

Die äquivalente Matrixform lautet:

$$\begin{pmatrix} R_A+R_B & -R_B & 0 \\ -R_B & R_B+R_C+R_D & -R_D \\ 0 & -R_D & R_D+R_E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_a \\ 0 \\ -U_b \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Bzw. in Matrixschreibweise:

$$Z \circ I = U\,. \tag{3.11}$$

Mit der *Impedanzmatrix* Z, die im Fall von Gleichstromnetzwerken lediglich reelle Komponenten enthält. Durch Lösung der Matrixgleichung lassen sich die zugehörigen Ströme quantifizieren. Anwendung der Cramerschen Regel ergibt:

$$\det(Z) = (R_A+R_B)\,(R_B+R_C+R_D)(R_D+R_E) - R_D^2 \;- R_B^2(R_D+R_E)$$

$$I_1 = \frac{1}{\det(Z)}\left\{U_a\,(R_B+R_C+R_D)(R_D+R_E) - R_D^2 \;- U_b R_B R_D\right\}$$

$$I_2 = \frac{1}{\det(Z)}\left\{U_a R_B (R_D+R_E) - U_b R_D (R_A+R_B)\right\}$$

$$I_3 = \frac{1}{\det(Z)}\left\{U_a R_B R_D - U_b\,(R_A+R_B)(R_B+R_C+R_D) - R_B^2\right\}$$

Das Beispiel zeigt, dass sich für die resultierenden Ströme selbst in überschaubaren Netzwerken, recht komplexe Ausdrücke ergeben. Die Umkehrung der Matrixgleichung erfolgt mit Hilfe der *Admittanzmatrix* Y. Es gilt:

$$I = Y \circ U\,. \tag{3.12}$$

Offensichtlich ist $Y=Z^{-1}$ die Inverse der Impedanzmatrix. Die Elemente der Impedanzmatrix können in ihrer allgemeinen Form wie folgt angegeben werden:

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

Hierbei ist das Matrixelement Z_{11} die Summe aller Widerstände, durch die der Maschenstrom I_1 fließt. Analog dazu sind Z_{22} und Z_{33} die Elemente, die von den Maschenströmen I_2 bzw. I_3 durchflossen werden.
Die verbliebenen Elemente Z_{ij}, mit $i \neq j$, repräsentieren die Summe aller Widerstände durch die die Ströme I_i und I_j fließen. Wegen $Z_{ij}=Z_{ji}$ ist die Impedanzmatrix *symmetrisch* bezüglich der Hauptdiagonalen.
Das Element U_1 ist die Summe aller Quellspannungen, die den Maschenstrom I_1 treiben. Analog dazu treiben U_2 und U_3 die Ströme I_2 und I_3. Dabei wird die Spannung stets positiv gezählt, wenn sie in Richtung des Maschenstroms treibt, ansonsten ist sie negativ.
Ist $(Z)_{ij}$ die Untermatrix der Impedanzmatrix, die entsteht, wenn man die i-te Zeile und die j-te Spalte weglässt, dann folgt aus der Cramerschen Regel:

$$I_1 = \frac{1}{\det(Z)} \quad U_1 \det(Z)_{11} - U_2 \det(Z)_{21} + U_3 \det(Z)_{31}$$

$$I_2 = \frac{1}{\det(Z)} \quad -U_1 \det(Z)_{12} + U_2 \det(Z)_{22} - U_3 \det(Z)_{32}$$

$$I_3 = \frac{1}{\det(Z)} \quad U_1 \det(Z)_{13} - U_2 \det(Z)_{23} + U_3 \det(Z)_{33}$$

Im allgemeinen gilt:

$$I_n = \frac{1}{\det(Z)} \sum_{k=1}^{N} U_k (-)^{k+n} \det(Z)_{kn} \tag{3.14}$$

Bei Netzwerken mit nur einer Spannungsquelle ist oft der Eingangswiderstand von Interesse. Besitzt das Netzwerk selber keine aktiven Elemente wie Spannungs- oder Stromquellen, so nennt man es ein *passives Netzwerk*. Die folgende Abbildung Abb. 1 zeigt eine schematische Darstellung des Problems:

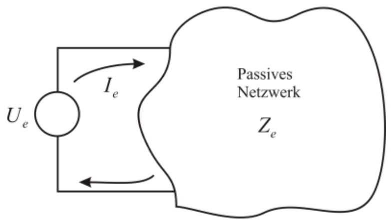


Abb.1: Spannungsquelle an einem passiven Netzwerk.

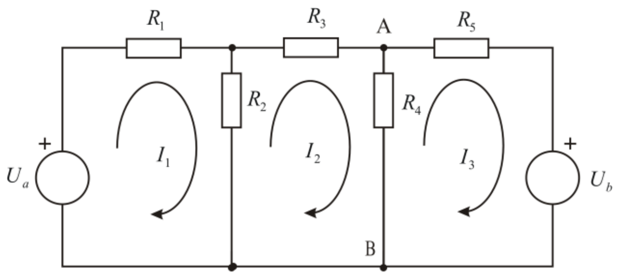
Da die Eingangsspannung U_e in diesem Fall die einzige Spannungsquelle ist, gilt für den Eingangsstrom I_e:

$$I_e = U_e \frac{\det(Z)_{11}}{\det(Z)}. \tag{3.15}$$

Die obige Gleichung definiert den *Eingangswiderstand* eines passiven Netzwerks aus dem Verhältnis von U_e zu I_e:

> Definition: Eingangswiderstand.
> Ist Z die Impedanzmatrix eines passiven Netzwerks und sei $(Z)_{11}$ die Untermatrix, die entsteht, wenn die erste Zeile und erste Spalte von Z weggelassen werden, dann gilt für den Eingangswiderstand des passiven Netzwerks:
>
> $$Z_e = \frac{\det(Z)}{\det(Z)_{11}}. \tag{3.16}$$

Beispiel: 3-Maschiges Netzwerk, bestehend aus den Spannungsquellen U_a und U_b und einer Reihe von Widerständen.



Die einzelnen Werte seien wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} R_1 &= 2\Omega \\ R_2 &= 4\Omega \\ R_3 &= 3\Omega \\ R_4 &= 5\Omega \\ R_5 &= 7\Omega \\ U_a &= 12V \\ U_b &= 27V \end{aligned}$$

Es sollen mit Hilfe der Impedanzmatrix die Zweigströme I_1, I_2 und I_3 ermittelt werden. Für die angegebenen Werte ist die Impedanzmatrix ist wie folgt gegeben:

$$Z = \begin{pmatrix} 6\Omega & -4\Omega & 0 \\ -4\Omega & 12\Omega & -5\Omega \\ 0 & -5\Omega & 12\Omega \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \det(Z) &= 6\Omega \cdot \begin{vmatrix} 12\Omega & -5\Omega \\ -5\Omega & 12\Omega \end{vmatrix} + 4\Omega \cdot \begin{vmatrix} -4\Omega & -5\Omega \\ 0 & 12\Omega \end{vmatrix} \\ &= 6\Omega\left(144\Omega^2 - 25\Omega^2\right) + 4\Omega\left(-48\Omega^2\right) \\ &= 522\Omega^3 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Cramerschen Regel lassen sich die unbekannten Ströme I_1, I_2 und I_3 ermitteln.

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\det(Z)} \begin{vmatrix} 12V & -4\Omega & 0 \\ 0 & 12\Omega & -5\Omega \\ -27V & -5\Omega & 12\Omega \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{522\Omega^3}\left(12V\left(144\Omega^2 - 25\Omega^2\right) - 27V\left(20\Omega^2\right)\right) \\ &= \frac{888V}{522\Omega} \\ &= 1{,}70A \end{aligned}$$

$$I_2 = \frac{1}{\det(Z)} \begin{vmatrix} 6\Omega & 12V & 0 \\ -4\Omega & 0 & -5\Omega \\ 0 & -27V & 12\Omega \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{522\Omega^3}\left(-12V\left(-48\Omega^2\right) + 27V\left(-30\Omega^2\right)\right)$$
$$= \frac{-234V}{522\Omega}$$
$$= -0,45A$$

$$I_3 = \frac{1}{\det(Z)} \begin{vmatrix} 6\Omega & -4\Omega & 12V \\ -4\Omega & 12\Omega & 0 \\ 0 & -5\Omega & -27V \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{522\Omega^3}\left(12V\,20\Omega^2 - 27V\left(72\Omega^2 - 16\Omega^2\right)\right)$$
$$= \frac{-1272V}{522\Omega}$$
$$= -2,44A$$

3.3 RC-GLIEDER

Unter RC-Gliedern versteht man in der Elektrotechnik Schaltungen, die aus einem ohmschen Widerstand R und einer Kapazität C aufgebaut sind. Sie werden in erster Linie als Frequenzfilter für elektrische Signale verwendet, oder fungieren als zeitgebendes Glied in schwing- und kippfähigen Schaltungen.
Im Folgenden wird eine RC-Schaltung beim Einschaltvorgang einer konstanten Spannung a) und bei der Anregung mit einer sinusförmigen Spannung b) untersucht. Die Anfangsbedingung sei in beiden Fällen durch $Q(0)=0$ gegeben.

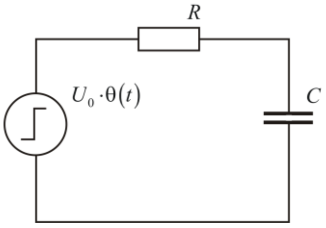


Abb. 1: RC-Kreis mit eingeschalteter Spannungsquelle.

a) Mit Hilfe der Kirchhoffschen Maschenregel lässt sich die zugehörige DGL für Q(t) aufstellen:

$$U_C + U_R = U(t)$$
$$\frac{1}{C} Q(t) + R\dot{Q}(t) = U_0 \theta(t)$$
$$\dot{Q}(t) + \frac{1}{RC} Q(t) = \frac{U_0}{R} \theta(t)$$

Durchführen einer Laplace-Transformation ergibt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\ Q\ (s) &= \tilde{Q}(s) \\
\mathcal{L}\ \dot{Q}\ (s) &= s\tilde{Q}(s) - Q(0) \\
&= s\tilde{Q}(s) \\
\mathcal{L}\ \theta\ (s) &= \int_0^{+\infty} dt e^{-st} \theta(t) \\
&= \int_0^{+\infty} dt e^{-st} \\
&= \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

Folglich gilt die Gleichung:

$$s\tilde{Q}(s) + \frac{1}{RC} \tilde{Q}(s) = \frac{U_0}{R} \frac{1}{s} \tag{3.17}$$

Umformen ergibt die Spektralfunktion:

$$\tilde{Q}(s) = \frac{U_0}{R} \frac{1}{s\left(s + \frac{1}{RC}\right)} \tag{3.18}$$

Anwendung der Umkehrtransformation ergibt den Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
Q(t) &= \mathcal{L}^{-1}\,\tilde{Q}\,(t) \\
&= \frac{U_0}{R}\int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty}\frac{ds}{2\pi i}\,\frac{e^{st}}{s\left(s+\frac{1}{RC}\right)} \\
&= \frac{U_0}{R}\left(RC - RCe^{-\frac{t}{RC}}\right) \\
&= U_0 C\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)
\end{aligned}
$$

Für die am Kondensator anliegende Spannung gilt:

$$
U(t) = U_0\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)
$$

Für die Stromstärke im Kreis ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
I(t) &= \dot{Q}(t) \\
&= \frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}
\end{aligned}
$$

Das Produkt aus Spannung und Strom ergibt die momentan dissipierte Leistung im eingeschalteten RC-Kreis:

$$
\begin{aligned}
\dot{W}(t) &= U(t)I(t) \\
&= \frac{U_0^2}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)
\end{aligned}
$$

Integration ergibt die, während des Ladevorgangs im Widerstand dissipierte Energie:

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{U_0^2}{R}\int_0^{+\infty} dt e^{-\frac{t}{RC}}\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right) \\
&= \frac{1}{2}CU_0^2
\end{aligned}
$$

Wie zu erwarten ergibt sich das bekannte Ergebnis für die in einem Kondensator gespeicherte elektrische Energie.
Zusammenfassend ergeben sich für den eingeschalteten RC-Kreis, die folgenden wichtigen Beziehungen:

Elektrische Größen bei eingeschaltetem RC-Kreis:

$$
\begin{aligned}
U(t) &= U_0\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right) \\
I(t) &= \frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \\
W &= \frac{1}{2}CU_0^2 \\
\tau &= RC
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

b) Mit Hilfe der Kirchhoffschen Maschenregel lässt sich die zugehörige DGL für Q(t) aufstellen:

$$
\begin{aligned}
U_C + U_R &= U(t) \\
\frac{1}{C}Q(t) + R\dot{Q}(t) &= U_0\sin(\omega t) \\
\dot{Q}(t) + \frac{1}{RC}Q(t) &= \frac{U_0}{R}\sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

Durchführen einer Laplace-Transformation ergibt:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\; Q\; (s) &= \tilde{Q}(s) \\
\mathcal{L}\; \dot{Q}\; (s) &= s\tilde{Q}(s) - Q(0) \\
&= s\tilde{Q}(s) \\
\mathcal{L}\; \sin(\omega t)\; (s) &= \int_0^{+\infty} dt e^{-st} \sin(\omega t) \\
&= \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}
\end{aligned}
$$

Folglich gilt die Gleichung:

$$
s\tilde{Q}(s) + \frac{1}{RC}\tilde{Q}(s) = \frac{U_0}{R}\frac{\omega}{\omega^2 + s^2}
$$

Umformen ergibt die Spektralfunktion:

$$
\tilde{Q}(s) = \frac{U_0}{R}\frac{1}{s + \frac{1}{RC}}\frac{\omega}{\omega^2 + s^2}
$$

Anwendung der Umkehrtransformation ergibt den Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
Q(t) &= \mathrm{L}^{-1}\; \tilde{Q}\; (t) \\
&= \frac{U_0}{R}\int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} \frac{ds}{2\pi i}\frac{\omega e^{st}}{(s^2 + \omega^2)(s + \frac{1}{RC})} \\
&= U_0 C \frac{1}{1 + (\omega CR)^2}\; \sin(\omega t) - \omega CR\cos(\omega t) + \omega CR \cdot e^{-\frac{t}{RC}}
\end{aligned}
$$

Unter Vernachlässigung der Einschwingzeit gilt:

$$
Q(t) = U_0 C \frac{1}{1 + (\omega CR)^2}\; \sin(\omega t) - \omega CR\cos(\omega t)
$$

Für die Stromstärke im Kreis ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
I(t) &= U_0 \frac{\omega C}{1 + (\omega CR)^2}\; \cos(\omega t) + \omega CR\sin(\omega t) \\
&= \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}\frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}\left[\frac{1}{\omega CR}\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right] \\
&= I_0 \frac{R}{|Z|}\left[\frac{1}{\omega CR}\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right] \\
&= I_0 \frac{|Z_C|}{|Z|}\; \cos(\omega t) + \omega CR\sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

Mit der Definition für den Betrag der gesamten Impedanz gilt demnach:

$$
I(t) = I_0 \frac{|Z_C|}{|Z|}\left(\cos(\omega t) + \omega CR\sin(\omega t)\right)
$$

mit $|Z| := \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}};\; |Z_C| := \frac{1}{\omega C}$ und $I_0 = \frac{U_0}{|Z|}$

In der Elektronik ist es üblich, trigonometrische Funktionen mit Hilfe der Additionstheoreme zu einer Funktion mit einer *Phasenverschiebung* δ im Argument, zusammenzufassen.
Der Ausdruck für $I(t)$ lässt sich wie folgt umformen:

$$\cos(\omega t) + \omega CR \sin(\omega t) = a \sin(\omega t + \delta)$$
$$= a \sin(\omega t)\cos\delta + a\cos(\omega t)\sin\delta$$

Vergleich ergibt:

$$a\cos\delta = \omega CR$$
$$a\sin\delta = 1$$
$$\tan\delta = \frac{1}{\omega CR}$$
$$\delta = \arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right)$$

Ferner gilt:

$$a^2\sin^2\delta = \cos^2\delta + \sin^2\delta$$
$$a^2\tan^2\delta = 1 + \tan^2\delta$$
$$a = \frac{1}{\tan\delta}\sqrt{1+\tan^2\delta}$$
$$= \omega C\sqrt{R^2 + \tfrac{1}{\omega^2 C^2}}$$
$$= \frac{|Z|}{|Z_C|}$$

Es ergibt sich demnach die einfache Darstellung:

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \delta) \quad ;\text{mit}\ \ \delta = \arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right) \tag{3.20}$$

Der Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung ist dabei positiv. Physikalisch bedeutet dies, dass der Strom der Spannung vorauseilt.
Mathematisch gesehen ist die Funktion

$$I(t) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}\sin\left(\omega t + \arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right)\right), \tag{3.21}$$

eine partikuläre Lösung der vorgegebenen inhomogenen DGL. Zu dieser Lösung können die Lösungen der korrespondierenden homogenen DGL hinzuaddiert werden. Da diese Lösungen allerdings mit exponentieller Ordnung abklingen, ist für den stationären bzw. eingeschwungenen Fall lediglich die partikuläre Lösung von Interesse.
Die Phasenverschiebung ist bei der Ermittlung der im RC-Kreis dissipierten Leistung von Bedeutung. Die mittlere Leistung ist gegeben durch:

$$\langle \dot{W} \rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt U(t) I(t)$$
$$= U_0 I_0 \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt \sin(\omega t)\sin(\omega t + \delta)$$
$$= \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos\delta$$

Führt man noch den Effektivwert für periodische Größen ein, dann ergibt sich:

$$\langle \dot{W} \rangle = U_{eff} I_{eff} \cos\delta \quad ;\text{mit}\ \ I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}; U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}\,. \tag{3.22}$$

Der Ausdruck $\cos\delta$ lässt sich noch mit Hilfe der Impedanzen im Wechselstromkreis ausdrücken. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\cos^2\delta &= \frac{\cos^2\delta}{\sin^2\delta+\cos^2\delta} \\
&= \frac{1}{1+\tan^2\delta} \\
&= \frac{1}{1+\frac{1}{\omega^2C^2R^2}} \\
&= \frac{R^2}{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}} \\
&\Rightarrow \cos\delta = \frac{R}{|Z|}
\end{aligned}
$$

Der Faktor $\cos\delta$ wird *Leistungsfaktor* genannt und entspricht dem Verhältnis aus ohmschen Widerstand zum Betrag der Gesamtimpedanz des Kreises. Zusammenfassend ergeben sich für den RC-Kreis mit sinusförmiger Anregung, die folgenden wichtigen Beziehungen:

Elektrische Größen im sinusförmig angeregten RC-Kreis:

$$
\begin{aligned}
&U(t) = U_0\sin(\omega t) \\
&I(t) = I_0\sin(\omega t+\delta) \quad ;\text{mit } I_0 = \frac{U_0}{|Z|};\delta = \arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right) \\
&\langle \dot{W} \rangle = U_{eff}\,I_{eff}\cos\delta \quad ;\text{mit } \cos\delta = \frac{R}{|Z|} \\
&|Z| = \sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$