3.4 RL-GLIEDER

Bei RL-Gliedern handelt es sich um Schaltungen, die aus einem ohmschen Widerstand *R* und einer Induktivität *L* bestehen. Sie finden in der Elektronik vor allen Dingen im HF-Bereich Verwendung als Filterelemente oder bei der Impulsformung. Zudem lassen sich die Eigenschaften von Transformatoren und Schaltnetzteilen auf RL-Glieder reduzieren. Im Folgenden wird eine RL-Schaltung beim Einschaltvorgang einer konstanten Spannung a) und bei der Anregung mit einer sinusförmigen Spannung b) untersucht. Die Anfangsbedingung sei in beiden Fällen durch $I(0)=0$ gegeben.

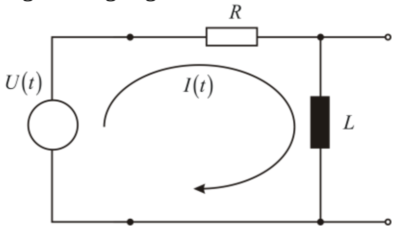

Abb. 1: RL-Kreis mit zeitabhängiger Eingangsspannung $U(t)$.

a) Mit Hilfe der Kirchhoffschen Maschenregel lässt sich die zugehörige DGL für *Q*(t) aufstellen:

$$
\begin{aligned}
U_L + U_R &= U(t) \\
L\dot{I}(t) + RL(t) &= U_0\theta(t) \\
\dot{I}(t) + \frac{R}{L}I(t) &= \frac{U_0}{L}\theta(t)
\end{aligned}
$$

Durchführen einer Laplace-Transformation ergibt:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\; I\;(s) &= \tilde{I}(s) \\
\mathcal{L}\; \dot{I}\;(s) &= s\tilde{I}(s) - I(0) \\
&= s\tilde{I}(s) \\
\mathcal{L}\; \theta\;(s) &= \int_0^{+\infty} dt e^{-st}\theta(t) \\
&= \int_0^{+\infty} dt e^{-st} \\
&= \frac{1}{s}
\end{aligned}
$$

Folglich gilt die Gleichung:

$$
s\tilde{I}(s) + \frac{R}{L}\tilde{I}(s) = \frac{U_0}{L}\frac{1}{s} \tag{3.24}
$$

Umformen ergibt die Spektralfunktion:

$$
\tilde{I}(s) = \frac{U_0}{L}\frac{1}{s\left(s+\frac{R}{L}\right)}\,. \tag{3.25}
$$

Anwendung der Umkehrtransformation ergibt den Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
I(t) &= \mathcal{L}^{-1}\; \tilde{I}\;(t) \\
&= \frac{U_0}{L}\int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty}\frac{ds}{2\pi i}\frac{e^{st}}{s\left(s+\frac{R}{L}\right)} \\
&= \frac{U_0}{L}\left(\frac{L}{R} - \frac{L}{R}e^{-\frac{Rt}{L}}\right) \\
&= \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)
\end{aligned}
$$

Für die im Kreis fließende Stromstärke gilt:

$$I(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{L}{RC}}\right) \cdot \tag{3.26}$$

Die Spannungsabfälle am Widerstand U_R und an der Induktivität U_L ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} U_R(t) &= RI(t) \\ &= U_0\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) \\ U_L(t) &= L\dot{I}(t) \\ &= U_0 e^{-\frac{R}{L}t} \end{aligned}$$

Offensichtlich ist die Summe aus U_R und U_L konstant. Das Produkt aus Spannung und Strom ergibt die momentan dissipierte Leistung im eingeschalteten RL-Kreis:

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) &= U(t)I(t) \\ &= \frac{U_0^2}{R} e^{-\frac{R}{L}t}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \end{aligned} \tag{3.28}$$

Integration ergibt die, während des Ladevorgangs im Widerstand dissipierte Energie:

$$\begin{aligned} W &= \frac{U_0^2}{R}\int_0^{+\infty} dt e^{-\frac{R}{L}t}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \\ &= \frac{1}{2} L I_0^2 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Wobei die Beziehung

$$I_0 = \frac{U_0}{R_0}$$

gilt. Wie zu erwarten ergibt sich das bekannte Ergebnis für die in einer Induktivität gespeicherte magnetische Energie.
Es lassen sich für den RL-Kreis, die folgenden wichtigen Beziehungen zusammenfassen:

Elektrische Größen bei eingeschaltetem RL-Kreis:

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \\ U_L(t) &= U_0 e^{-\frac{R}{L}t} \\ W &= \frac{1}{2} L I_0^2 \\ \tau &= \frac{L}{R} \end{aligned} \tag{3.30}$$

b) Mit Hilfe der Kirchhoffschen Maschenregel lässt sich die zugehörige DGL für I(t) aufstellen:

$$\begin{aligned} U_L + U_R &= U(t) \\ L\dot{I}(t) + RI(t) &= U_0 \sin(\omega t) \\ \dot{I}(t) + \frac{R}{L} I(t) &= \frac{U_0}{L}\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Durchführen einer Laplace-Transformation ergibt:

$$
\begin{aligned}
L\;\; I\;\; (s) &= \tilde{I}(s) \\
L\;\; \dot{I}\;\; (s) &= s\tilde{I}(s) - I(0) \\
&= s\tilde{I}(s) \\
L\;\; \sin(\omega t)\;\; (s) &= \int_0^{+\infty} dte^{-st}\sin(\omega t) \\
&= \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}
\end{aligned}
$$

Folglich gilt die Gleichung:

$$
s\tilde{I}(s) + \frac{R}{L}\tilde{I}(s) = \frac{U_0}{L}\frac{\omega}{\omega^2 + s^2} \tag{3.31}
$$

Umformen ergibt die Spektralfunktion:

$$
\tilde{I}(s) = \frac{U_0}{L}\frac{1}{s + \frac{R}{L}}\frac{\omega}{\omega^2 + s^2}\,. \tag{3.32}
$$

Anwendung der Umkehrtransformation ergibt den Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
I(t) &= L^{-1}\;\; \tilde{I}\;\; (t) \\
&= \frac{U_0}{L}\int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty}\frac{ds}{2\pi i}\frac{e^{st}}{\left(s^2 + \omega^2\right)\left(s + \frac{R}{L}\right)} \\
&= -\frac{U_0}{L}\frac{L^2}{R^2 + \omega^2 L^2}\left[\cos(\omega t) - \frac{R}{\omega L}\sin(\omega t) + e^{-\frac{Rt}{L}}\right]
\end{aligned}
$$

Umformen ergibt:

$$
\begin{aligned}
I(t) &= -\frac{U_0}{L}\frac{\omega L^2}{R^2 + \omega^2 L^2}\left[\cos(\omega t) - \frac{R}{\omega L}\sin(\omega t)\right] \\
&= -\frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\left[\cos(\omega t) - \frac{R}{\omega L}\sin(\omega t)\right] \\
&= \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\left[\sin(\omega t) - \frac{\omega L}{R}\cos(\omega t)\right]
\end{aligned}
$$

Mit der Definition für den Betrag der gesamten Impedanz gilt:

$$
\begin{aligned}
&I(t) = I_0\frac{R}{|Z|}\left(\sin(\omega t) - \frac{\omega L}{R}\cos(\omega t)\right) \\
&\text{mit}\quad |Z| := \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2};\quad \text{und}\quad I_0 = \frac{U_0}{|Z|}
\end{aligned} \tag{3.33}
$$

Der Ausdruck in b) lässt sich wie folgt umformen:

$$
\begin{aligned}
\sin(\omega t) - \frac{\omega L}{R}\cos(\omega t) &= a\sin(\omega t + \delta) \\
&= a\sin(\omega t)\cos\delta + a\cos(\omega t)\sin\delta
\end{aligned}
$$

Vergleich ergibt:

$$a\cos\delta = 1$$
$$a\sin\delta = -\frac{\omega L}{R}$$
$$\tan\delta = -\frac{\omega L}{R}$$
$$\delta = -\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned}
a^2\cos^2\delta &= \cos^2\delta + \sin^2\delta \\
a^2 &= 1+\tan^2\delta \\
&= 1+\left(\frac{\omega L}{R}\right)^2 \\
&= \frac{R^2+\omega^2 L^2}{R^2} \\
&= \frac{|Z|^2}{R^2} \\
a &= \frac{|Z|}{R}
\end{aligned}$$

Einsetzen ergibt: den Ausdruck

$$I(t) = \frac{U_0}{|Z|}\sin\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right). \qquad (3.34)$$

Die Stromstärke im RL-Kreis besitzt demnach die Form:

$$I(t) = I_0\sin(\omega t - \delta). \qquad (3.36)$$

Die negative Phasenverschiebung -δ bedeutet, dass die Spannung dem Strom vorauseilt.
Mathematisch gesehen ist die Funktion

$$I(t) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}\sin\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right), \qquad (3.37)$$

eine partikuläre Lösung der vorgegebenen inhomogenen DGL. Zu dieser Lösung können die Lösungen der korrespondierenden homogenen DGL hinzuaddiert werden. Da diese Lösungen allerdings mit exponentieller Ordnung abklingen, ist für den stationären bzw. eingeschwungenen Fall lediglich die partikuläre Lösung von Interesse.
Die Phasenverschiebung ist beispielsweise bei der Ermittlung der im RL-Kreis dissipierten Leistung von Bedeutung. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\langle\dot{W}\rangle &= \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} dt\, U(t) I(t) \\
&= U_0 I_0 \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt\,\sin(\omega t)\sin(\omega t - \delta) \\
&= \frac{1}{2}U_0 I_0\cos\delta
\end{aligned}$$

Führt man noch den Effektivwert für periodische Größen ein, dann ergibt sich:

$$\langle\dot{W}\rangle = U_{eff} I_{eff}\cos\delta \quad ;\text{mit } I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}; U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}. \qquad (3.38)$$

Der Ausdruck $\cos\delta$ lässt sich noch mit Hilfe der Impedanzen im Wechselstromkreis ausdrücken. Es gilt:

$$\cos^2\delta = 1-\sin^2\delta$$
$$= \frac{\cos^2\delta}{\sin^2\delta+\cos^2\delta}$$
$$= \frac{1}{1+\tan^2\delta}$$
$$= \frac{1}{1+\frac{\omega^2 L^2}{R^2}}$$
$$= \frac{R^2}{R^2+\omega^2 L^2}$$
$$\Rightarrow \cos\delta = \frac{R}{|Z|}$$

Der Faktor $\cos\delta$ wird *Leistungsfaktor* genannt und entspricht dem Verhältnis aus ohmschen Widerstand zum Betrag der Gesamtimpedanz des Kreises.
Zusammenfassend ergeben sich für den RL-Kreis mit sinusförmiger Anregung, die folgenden wichtigen Beziehungen:

Elektrische Größen im sinusförmig angeregten RL-Kreis:

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t)$$
$$I(t) = I_0 \sin(\omega t - \delta) \quad ;\text{mit } I_0 = \frac{U_0}{|Z|}; \delta = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) \tag{3.39}$$
$$\langle \dot{W} \rangle = U_{eff} I_{eff} \cos\delta \quad ;\text{mit } \cos\delta = \frac{R}{|Z|}$$
$$|Z| = \sqrt{R^2+\omega^2 L^2}$$