## 3.5 NETZWERKANALYSE MIT SINUSGRÖSSEN

Prinzipiell stellt die Annahme einer sinusförmigen Quelle für die Netzwerkanalyse keine Einschränkung dar, zumal jede periodische Quelle durch eine äquivalente Kombination von Sinusformen ersetzt werden kann. Dies ist eine fundamentale Aussage des *Fourierschen Theorems*.
Bei der Analyse eines RC- bzw. RL-Glieds und der Quantifizierung der entsprechenden Ströme- und Spannungen, zeigt sich, dass es im eingeschwungenen Zustand lediglich auf die Amplituden und die Phasenunterschiede ankommt. Für das RC-Glied ergibt sich:

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \delta). \tag{3.40}$$

Der Strom eilt der Spannung um den Phasenwinkel $\delta$ voraus, wobei der Phasenwinkel frequenzabhängig ist. Für $\omega CR>>1$ ist $\delta=0$ und für $\omega CR<<1$ ist $\delta=\pi/2$.

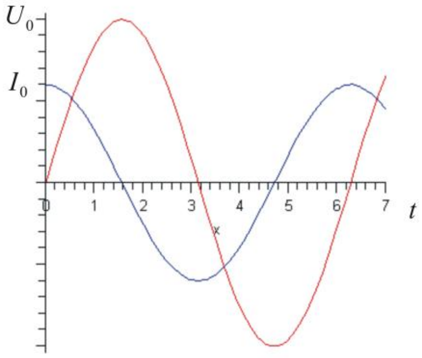



*Abb*. 1: Phasenverschiebung zwischen $I(t)$ und $U(t)$ beim RC-Glied.

Ein gerichtetes Liniensegment oder ein *Raumzeiger*, der mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega$ rechtshändig rotiert, projiziert auf die Vertikale eine Sinusfunktion.

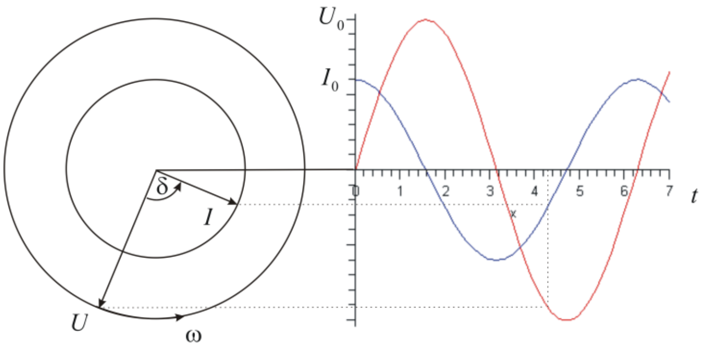


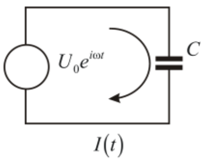

*Abb*. 2: Phasenverschiebung zwischen $I$ und $U$ beim RC-Glied.

Die Länge des Raumzeigers entspricht der Amplitude der Sinuskurve und der Winkel zwischen zwei Positionen ist der Phasenwinkel zwischen den zugehörigen Punkten der Sinuskurve.
Eilt wie beispielsweise in einem RL-Glied die Spannung dem Strom um den Phasenwinkel $\delta$ voraus, dann lässt sich das durch zwei um den Winkel $\delta$ versetzte Raumzeiger darstellen. Legt man die vertikale Projektionsachse auf die imaginäre Achse der komplexen Ebene, dann lässt sich ein Raumzeiger mit Hilfe der komplexen Zahlen darstellen. So gilt für eine beliebige Wechselspannung:

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t} \tag{3.41}$$

Der Sachverhalt lässt sich am Beispiel eines Kondensators in einem sinusförmig angeregten Kreis veranschaulichen:

Beispiel: Idealer Kondensator mit sinusförmiger Anregung.




Für den Strom, der bei einer zeitlich veränderlichen Spannung am Kondensator durch den Kreis fließt, gilt.

$$\begin{aligned} I(t) &= C \cdot \dot{U}(t) \\ &= i\omega C \cdot U(t) \end{aligned}$$

Wegen $i = e^{i\pi/2}$ beträgt der Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung $\delta$=90°. Der Strom im Kreis besitzt demnach die Darstellung.

$$I(t) = \omega C \cdot U_0 e^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

oder auch

$$I(t) = \omega C \cdot U_0 e^{i\delta} e^{i\omega t} \quad ; \text{ mit } \quad \delta = \frac{\pi}{2} \cdot \tag{3.42}$$

Im zugehörigen Raumzeigerdiagramm sind die Zeiger für Strom und Spannung um 90° versetzt. Der Winkel ist positiv, so dass der Strom der Spannung vorauseilt.

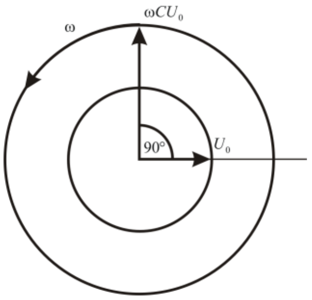
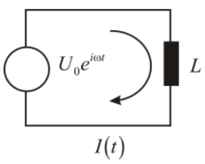



*Abb*.3: Phasendrehung des Stroms gegenüber der Spannung für einen idealen Kondensator.

Das Verhältnis der Größen definiert die komplexe Impedanz des Kondensators:

$$\boxed{Z_C := -\frac{i}{\omega C} \cdot \qquad (3.43)}$$

Beispiel: Ideale Spule mit sinusförmiger Anregung.




Der resultierende Strom im Kreis folgt aus:

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{L} \int dt U(t) \\ &= \frac{1}{i\omega L} \cdot U(t) \end{aligned}$$

Wegen $i^{-1} = e^{-i\pi/2}$ beträgt der Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung $\delta$=-90°. Der Strom im Kreis besitzt demnach die Darstellung:

$$I(t)=\frac{1}{\omega L}\cdot U_0 e^{i\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)}$$

oder auch

$$I(t)=\frac{1}{\omega L}\cdot U_0 e^{i\delta}e^{i\omega t}\ ;\ \text{mit}\quad \delta=-\frac{\pi}{2} \qquad (3.44)$$

Im zugehörigen Raumzeigerdiagramm sind die Zeiger für Strom und Spannung um 90° versetzt. Der Winkel ist negativ, so dass die Spannung dem Strom vorauseilt.

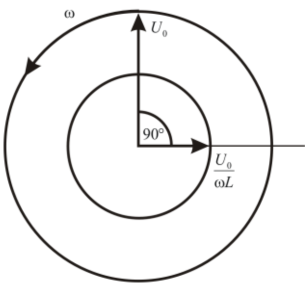



*Abb*.4: Phasendrehung der Spannung gegenüber dem Strom für eine ideale Spule.

Das Verhältnis der elektrischen Größen definiert die komplexe Impedanz der Induktivität.

$$\boxed{Z_L=i\omega L\,. \qquad (3.45)}$$

Unter Betrachtung der Rechenregeln für komplexe Zahlen haben die Impedanzen $Z_C$ und $Z_L$ für mit Wechselstrom durchflossene Kondensatoren und Spulen dieselbe Bedeutung wie $R$ für einen ohmschen Widerstand.

Definition: Impedanz.
Das Verhältnis aus dem Raumzeiger der Spannung $U$ zum Raumzeiger des Stroms $I$, ist definiert als Impedanz $Z$, mit:

$$Z:=\frac{U}{I}\ ;\ \text{mit}\quad Z\in C\,. \qquad (3.46)$$

Bei einem Netzwerk, das mit Hilfe frequenzabhängiger, komplexer Größen beschrieben wird, sagt man, dass man im *Frequenzbereich* arbeitet. Werden die stationären Zustände durch Sinus- und Kosinusfunktionen beschrieben, dann arbeitet man im *Zeitbereich*. Im Frequenzbereich werden die Netzwerkelemente durch eine *Äquivalent-Impedanz* ersetzt. Die Impedanz eines Netzwerks

$$Z=R+iX\,, \qquad (3.47)$$

lässt sich aufteilen in den Realteil, der *Resistanz* und den Imaginärteil, der *Reaktanz*.

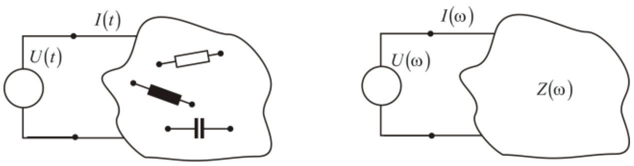



*Abb*. 5: Zeitbereich und Frequenzbereich bei beliebigen Netzwerken.

Für Impedanzen ist die Beziehung $U=IZ$ formal identisch mit dem ohmschen Gesetz $U=IR$. Daher gelten für die Kombination von Impedanzen genau dieselben Regeln wie für Widerstände.
Die Reihenschaltung von Impedanzen gilt:

$$Z_g=\sum_n Z_n \qquad (3.48)$$

Bei der Parallelschaltung gilt:

$$\frac{1}{Z_g} = \sum_n \frac{1}{Z_n} \tag{3.49}$$

Der Kehrwert der Impedanz heißt *Admittanz* $Y$. Analog zur Impedanz ist die Admittanz eine komplexe Zahl

$$Y = G + iB \tag{3.50}$$

wobei der Realteil *Konduktanz* und der Imaginärteil *Suszeptanz* heißt. Für die Reihenschaltung von Admittanzen gilt:

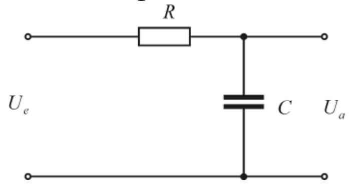
$$\frac{1}{Y_g} = \sum_n \frac{1}{Y_n} \tag{3.51}$$

Bei der Parallelschaltung gilt:

$$Y_g = \sum_n Y_n \tag{3.52}$$

Reihenschaltungen können demnach am einfachsten über die Impedanz beschrieben werden, während bei Parallelschaltungen eine Analyse über die zugehörigen Admittanzen am einfachsten ist. Die Theoreme von *Thévenin* und *Norton* gelten auch für komplexe Impedanzen, wenn die zugehörigen Spannungen und Ströme durch die Raumzeiger $Ue^{i\omega t}$ und $Ie^{i\omega t}$ ersetzt werden. Analoges gilt für den *Überlagerungssatz*.
Für die *Maschenanalyse* von Netzwerken mit komplexen Impedanzen gelten dieselben Beziehungen, wobei die Impedanzmatrix $Z$ nun komplex ist.

Beispiel: Tiefpass.
Der Tiefpass ist eine Schaltung, die Wechselspannungen niedriger Frequenz ohne größere Abschwächung überträgt, Wechselspannungen hoher Frequenz dagegen stark dämpft. Mit Kondensatoren lässt sich ein Tiefpassfilter wie folgt realisieren:




Die Eingangsspannung sei sinusförmig. Für die Wechselspannung stellt die Kapazität einen Blindwiderstand dar, mit der Impedanz:

$$Z = R + \frac{1}{i\omega C}$$

Für den Strom $I$ gilt demnach:

$$\begin{aligned} I &= \frac{U_e}{Z} \\ &= \frac{U_e}{R + \frac{1}{i\omega C}} \end{aligned}$$

Für die Ausgangsspannung $U_a$ gilt:

$$\begin{aligned} U_a &= \frac{I}{i\omega C} \\ &= U_e \cdot \frac{1}{i\omega C} \cdot \frac{1}{R + \frac{1}{i\omega C}} \end{aligned}$$

Das Verhältnis aus Ausgangsspannung zur Eingangsspannung definiert eine dimensionslose Größe, die *Übertragungsfunktion*, mit:

$$H(\omega) := \frac{U_a}{U_e} \qquad (3.53)$$

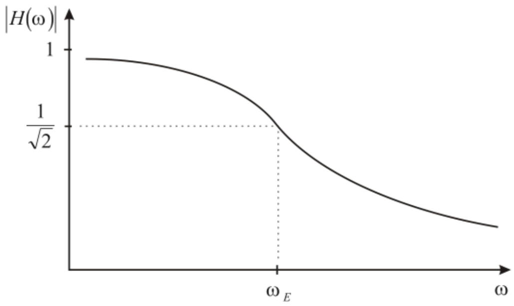
Es lässt sich nun explizit die Betragsfunktion angeben:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{i\omega C} \frac{1}{R + \frac{1}{i\omega C}} \\ &= \frac{1}{1+\omega^2 C^2 R^2}(1 - i\omega CR) \end{aligned}$$

Der Betrag der Übertragungsfunktion ist demnach gegeben durch:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 C^2 R^2}}$$

In der nachfolgenden Abbildung ist der zugehörige Kurvenverlauf skizziert:




Die Bedingung $\omega_E CR = 1$ definiert die *Eckfrequenz* $\omega_E$ des Tiefpassfilters.

$$\omega_E := \frac{1}{RC}. \qquad (3.54)$$

Es gilt:

$$|H(\omega_E)| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

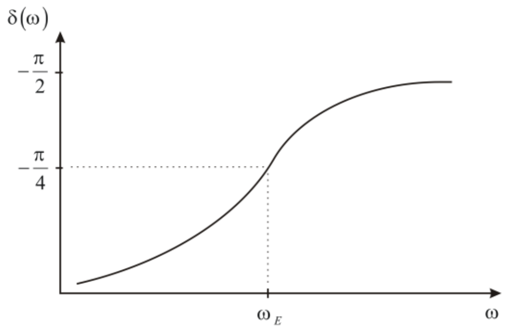
Die Phasenverschiebung lässt sich aus der Darstellung der Übertragungsfunktion $H(\omega) = a(\omega) + ib(\omega)$ gewinnen:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= a(\omega) + ib(\omega) \\ &= \frac{1}{1+\omega^2 C^2 R^2}(1 - i\omega CR) \\ \tan\delta &= \frac{b(\omega)}{a(\omega)} \\ &= -\omega CR \end{aligned}$$

Folglich gilt:

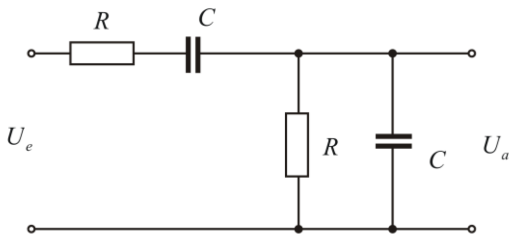
$$\delta(\omega) = -\arctan(\omega CR)$$

In der nachfolgenden Abbildung ist der zugehörige Kurvenverlauf skizziert:




Man beachte hier das negative Vorzeichen des Phasenwinkels.

Beispiel: *Wien-Brücke* aus RC-Gliedern
Die *Wien-Brücke* ist eine Kombination aus Hochpass und Tiefpass und dient dazu, Wechselspannungen mit einer bestimmten Eckfrequenz $\omega_E$ durchzulassen. Wechselspannungen mit höheren oder tieferen Frequenzen sollen hierbei gedämpft werden.




Die Eingangsspannung sei wieder sinusförmig. Das Netzwerk lässt sich mit Hilfe der Impedanzmatrix einfach beschreiben.
Mit Hilfe der Impedanzmatrix $Z$ lässt sich die Übertragungsfunktion $H(\omega)$ und die Phasenverschiebung $\delta$ bestimmen. Es gilt:

$$Z = \begin{pmatrix} 2R + \frac{1}{i\omega C} & -R \\ -R & R + \frac{1}{i\omega C} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(Z) &= \left(2R + \frac{1}{i\omega C}\right)\left(R + \frac{1}{i\omega C}\right) - R^2 \\ &= 2R^2 - \frac{1}{\omega^2 C^2} + 3\frac{R}{i\omega C} - R^2 \\ &= \left(R^2 - \frac{1}{\omega^2 C^2}\right) + \frac{3R}{i\omega C} \\ &= \left(\frac{1}{i\omega C}\right)^2 \left(1 - \omega^2 C^2 R^2\right) + 3i\omega CR \end{aligned}$$

Der Strom $I_2$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\det(Z)} \begin{vmatrix} 2R + \frac{1}{i\omega C} & U_e \\ -R & 0 \end{vmatrix} \\ &= U_e \frac{R}{\det(Z)} \end{aligned}$$

Die Ausgangsspannung ist:

$$U_a = \frac{I_2}{i\omega C}$$
$$= U_e \frac{R}{i\omega C} \frac{1}{\det(Z)}$$

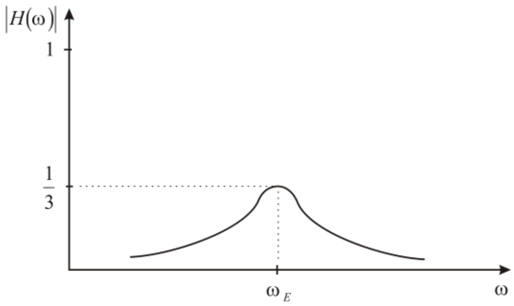
Folglich ist die Übertragungsfunktion gegeben durch:

$$H(\omega) = \frac{1}{i\omega C} \frac{R}{\det(Z)}$$
$$= \frac{i\omega CR}{\left(1-\omega^2 C^2 R^2\right) + 3i\omega CR}$$
$$= \frac{\omega CR}{\left(1-\omega^2 C^2 R^2\right)^2 + 9\omega^2 C^2 R^2}\left(3\omega CR - i\left(1-\omega^2 C^2 R^2\right)\right)$$

Der Betrag ergibt sich nun mit:

$$|H(\omega)| = \frac{\omega CR}{\sqrt{\left(1-\omega^2 C^2 R^2\right)^2 + 9\omega^2 C^2 R^2}}$$

In der nachfolgenden Abbildung ist der zugehörige Kurvenverlauf skizziert:




Die Phasenverschiebung lässt sich aus der Darstellung der Übertragungsfunktion $H(\omega)=a(\omega)+ib(\omega)$ gewinnen:

$$H(\omega) = a(\omega) + ib(\omega)$$
$$= \frac{\omega CR}{\left(1-\omega^2 C^2 R^2\right)^2 + 9\omega^2 C^2 R^2}\left(3\omega CR - i\left(1-\omega^2 C^2 R^2\right)\right)$$
$$\tan\delta = \frac{b(\omega)}{a(\omega)}$$
$$= \frac{\left(1-\omega^2 C^2 R^2\right)}{3\omega CR}$$

Folglich gilt:

$$\delta(\omega) = \arctan\left(\frac{\left(1-\omega^2 C^2 R^2\right)}{3\omega CR}\right)$$