

3.7 TRANSFORMATORTHEORIE

Erste quantitative Beobachtungen über den Zusammenhang zwischen zeitabhängigen elektrischen Feldern und magnetischen Feldern wurden bereits von Michael Faraday im Jahre 1831 durchgeführt. Er untersuchte hierbei das Verhalten von Strömen in Leiterschleifen, die zeitlich veränderlichen Magnetfeldern ausgesetzt waren. Grundsätzlich erzeugt jeder elektrische Strom I , der durch eine Leiterkonfiguration fließt, ein Magnetfeld \mathbf{B} . Sei S die von einer Leiterschleife aufgespannte Fläche, mit der Flächennormalen \mathbf{n} und dem geschlossenen Rand δS , dann charakterisiert der magnetische Fluss Φ_m die magnetische Induktion durch diese Fläche.

Definition: Magnetischer Fluss.

$$\Phi_m = \iint_S dA \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}. \quad (3.79)$$

Der experimentelle Befund besagt nun, dass ein sich zeitlich ändernder magnetischer Fluss, durch eine geschlossene Leiterschleife, eine *elektromotorische Kraft* U_{emf} in dieser hervorruft, die proportional zur zeitlichen Änderungsrate von Φ_m ist. Dieses Phänomen ist als *Faradaysches Induktionsgesetz* bekannt.

Axiom: Faradaysches Induktionsgesetz.

$$U_{emf} = - \frac{d}{dt} \Phi_m. \quad (3.80)$$

Aufgrund der induzierten Ringspannung fließt ein Strom in der Schleife, der wiederum ein Magnetfeld erzeugt, das der Ursache des ursprünglichen Feldes entgegenwirkt. Dieser Sachverhalt ist als *Lenzsche Regel* bekannt.

Lenzsche Regel:

Der in eine Leiterschleife induzierte Strom ist stets so gerichtet, dass sein Magnetfeld der Induktionsursache entgegenwirkt.

Anschaulich besagt sie, dass sich das System nicht aufschaukeln kann und die zugehörigen Felder von allein nicht immer stärker werden können, da dies den Energieerhaltungssatz verletzt.

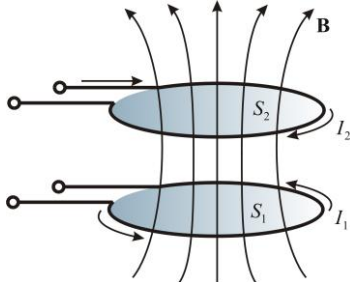


Abb. 1: Zwei induktiv gekoppelte Leiterschleifen.

Ein in der Elektrotechnik äußerst nützliches Konzept bei der Behandlung von Systemen mit stromführenden Leiterschleifen, ist das der Induktionskoeffizienten. Sie hängen lediglich von der Geometrie der Leiterkonfiguration ab und stellen eine Beziehung her zwischen der Energie des Magnetfeldes, das von der stromführenden Leiterschleife erzeugt wird und den zugehörigen Strömen.

Die Eigeninduktivität und die Gegeninduktivität zweier beliebiger Stromschleifen lassen sich formal über die magnetischen Flüsse definieren. Ist Φ_{11} der magnetische Fluss ausgehend vom Spulenstrom I_1 der die von der Stromschleife aufgespannte Fläche S_1 durchdringt, dann lässt sich die *Selbstinduktion* L_1 wie folgt definieren:

Definition: Selbstinduktivität.

$$\Phi_{11} = L_1 I_1. \quad (3.81)$$

Ganz analog dazu lässt sich die Gegeninduktivität einführen. Ist Φ_{21} der magnetische Fluss ausgehend vom Spulenstrom I_1 , der die von der zweiten Leiterschleife aufgespannten Fläche S_2 durchdringt, dann lässt sich die **Gegeninduktivität** M_{21} wie folgt definieren:

Definition: Gegeninduktivität.

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1 \quad (3.82)$$

Insbesondere in der Transformatortheorie spielt das Konzept der Gegeninduktivität eine große Rolle, weil hier zeitlich veränderliche Ströme über den Austausch ihrer magnetischen Flüsse miteinander in Wechselwirkung treten.

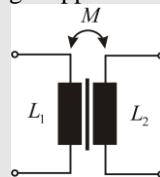
Die Gegeninduktivität zweier Leiterschleifen und deren Eigeninduktivitäten sind über den **Kopplungsfaktor** k miteinander korreliert.

Definition: Kopplungsfaktor.

$$M_{12}^2 = k^2 L_1 L_2 \quad (3.83)$$

Hierbei ist k ein Maß dafür, wie die magnetischen Flüsse der einzelnen Schleifen einander durchdringen. Liegen beispielsweise zwei Stromschleifen sehr eng beieinander, dann durchdringt ein großer Anteil des von der ersten Spule erzeugten Magnetfelds die von der zweiten Spule aufgespannte Flussfläche und umgekehrt. Der Kopplungsfaktor ist in diesem Fall sehr hoch. Andererseits ist die Kopplung zweier stromführenden Schleifen sehr klein, wenn sie weit auseinander liegen. Nur ein geringer Anteil der von einer Spule erzeugten Magnetfelder durchdringt die von der jeweils anderen Spule aufgespannte Flussfläche. Magnetische Flüsse, die vom Strom einer Schleife S_1 erzeugt werden und die andere Schleife nicht durchdringen, werden **Streuflüsse** genannt. Eine Erhöhung des Kopplungsfaktors ist gleichbedeutend mit einer Verringerung der Streuflüsse.

Schaltzeichen für zwei magnetisch gekoppelte Induktivitäten:



Ein **Transformator** ist ein Bauelement der Elektrotechnik, das elektrische Energie zwischen zwei induktiv gekoppelten Kreisen möglichst verlustarm überträgt. Der Kreis mit der aktiven Spannungsquelle heißt Primärkreis und der Kreis mit der Last heißt Sekundärkreis. Die folgende Abbildung zeigt das Schaltbild eines realen Transformators mit angeschlossener Last.

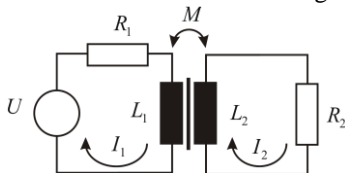


Abb. 2: Schaltbild eines Transformators.

Der Strom der in den Sekundärkreis induziert wird, ist gemäß der Lenzschen Regel stets so gerichtet, dass er seiner Ursache entgegenwirkt. Unter Verwendung der Kirchhoffschen Maschenregel, lässt sich das zugehörige DGL-System aufstellen.

Kirchhoffsche Maschenregel:

$$\begin{aligned} U(t) + U_{R_1} + U_{L_1} + U_{M_{12}} &= 0 \\ U_{R_2} + U_{L_2} + U_{M_{21}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.84)$$

Nach Abb. 2 sind die an den Impedanzen abfallenden Spannungen gegeben durch:

$$\begin{aligned}
U_{R_1} &= -R_1 I_1(t) & U_{R_2} &= -R_2 I_2(t) \\
U_{L_1} &= -L_1 \dot{I}_1(t) & U_{L_2} &= -L_2 \dot{I}_2(t) \\
U_{M_{12}} &= -M \dot{I}_2(t) & U_{M_{21}} &= -M \dot{I}_1(t)
\end{aligned}$$

Es ergibt sich ein System aus zwei gekoppelten DGL's, mit:

$$\begin{aligned}
L_1 \dot{I}_1(t) + M \dot{I}_2(t) + R_1 I_1(t) &= U(t) \\
L_2 \dot{I}_2(t) + M \dot{I}_1(t) + R_2 I_2(t) &= 0
\end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werde zunächst von einer sinusförmigen Zeitabhängigkeit der Eingangsspannung ausgegangen. Es gilt:

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t). \quad (3.85)$$

Eine Laplace-Transformation der relevanten Größen ergibt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} I_1(s) &= \tilde{I}_1(s) & \mathcal{L} I_2(s) &= \tilde{I}_2(s) \\
\mathcal{L} \dot{I}_1(s) &= s\tilde{I}_1(s) - I_1(0) & \mathcal{L} \dot{I}_2(s) &= s\tilde{I}_2(s) - I_2(0) \\
\mathcal{L} U(s) &= U_0 \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}
\end{aligned}$$

Die Anfangsbedingungen sind durch $I_1=0$ und durch $I_2=0$ gegeben. Dies bedeutet nichts anderes, als dass zu Beginn des Einschwingvorgangs keine Ströme fließen. Mit Hilfe der Laplace-Transformation lässt sich ein System aus gekoppelten DGL's in ein System aus miteinander gekoppelten algebraischen Gleichungen umwandeln. Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen gilt demnach:

$$\begin{aligned}
sL_1 \tilde{I}_1(s) + sM \tilde{I}_2(s) + R_1 \tilde{I}_1(s) &= U_0 \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\
sM \tilde{I}_1(s) + sL_2 \tilde{I}_2(s) + R_2 \tilde{I}_2(s) &= 0
\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung lässt sich sofort umstellen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
sM \tilde{I}_1(s) + (sL_2 + R_2) \tilde{I}_2(s) &= 0 \\
\Rightarrow \tilde{I}_2(s) &= -\frac{sM}{sL_2 + R_2} \tilde{I}_1(s)
\end{aligned}$$

Der induzierte Strom, lässt sich somit als Funktion der Eingangsgrößen und der elektrischen Parameter der beiden Kreise ausdrücken. Die gefundene Beziehung kann in die erste Gleichung des Gleichungssystems eingesetzt werden. Es ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}
sL_1 \tilde{I}_1(s) - \frac{s^2 M^2}{sL_2 + R_2} \tilde{I}_1(s) + R_1 \tilde{I}_1(s) &= U_0 \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\
(s^2 L_1 L_2 - s^2 M^2) \tilde{I}_1(s) + (sL_1 R_2 + sL_2 R_1 + R_1 R_2) \tilde{I}_1(s) &= U_0 (sL_2 + R_2) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}
\end{aligned}$$

Zunächst werde für den Kreis eine ideale Kopplung vorausgesetzt, so dass $M^2=L_1 L_2$ ist. Demnach gilt:

$$\begin{aligned}
(sL_1 R_2 + sL_2 R_1 + R_1 R_2) \tilde{I}_1(s) &= U_0 \omega \frac{sL_2 + R_2}{s^2 + \omega^2} \\
\tilde{I}_1(s) &= U_0 \omega \frac{sL_2 + R_2}{s^2 + \omega^2} \frac{1}{sL_1 R_2 + sL_2 R_1 + R_1 R_2}
\end{aligned}$$

Der Eingangsstrom ist somit eindeutig bestimmt durch die Eigenschaften der Spannungsquelle und den elektrischen Parametern des Lastkreises. Durch eine Umkehrtransformation lässt sich die Stromstärke im

Eingangskreis in Abhängigkeit von der Zeit zurückgewinnen. Aus der Theorie der Laplace-Transformationen folgt:

$$I_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} ds e^{st} \tilde{I}_1(s). \quad (3.86)$$

Das in diesem Kontext auftretende Integral wird im folgenden fakultativen Abschnitt explizit ausgewertet.

Fakultativer Abschnitt

Auswertung Umkehrtransformation durch Integration über eine Bromwich-Kurve.

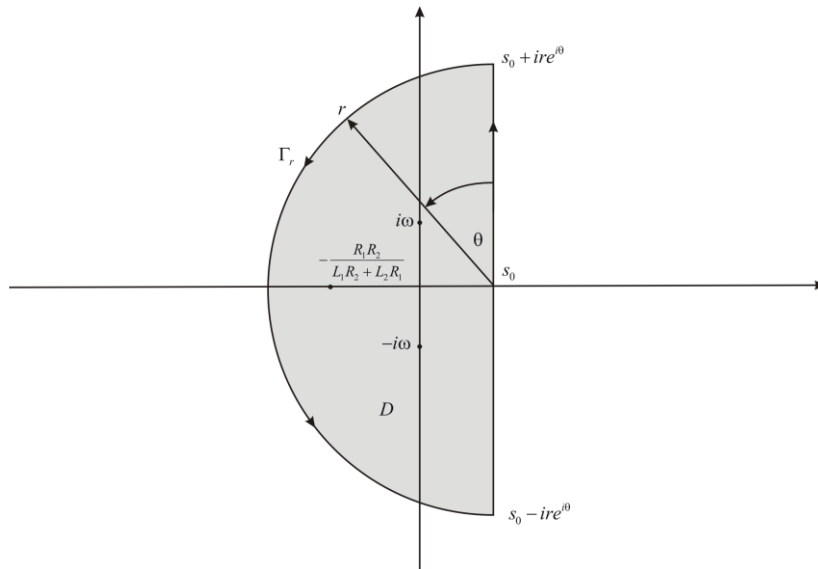


Abb. 3: Integrationskurve über die Polstellen des Integranden $\tilde{I}_1(s)$.

Wie in Abb. 2 zu sehen ist besitzt der Integrand Polstellen erster Ordnung innerhalb des Integrationsbereichs D . Eine Integration entlang von ∂D , lässt sich unter Verwendung des Residuensatzes durchführen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} ds \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2} \frac{R_2 + sL_2}{s + \frac{R_1 R_2}{L_1 R_2 + L_2 R_1}} &= \sum \operatorname{Res} \left\{ \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2} \frac{R_2 + sL_2}{s + \frac{R_1 R_2}{L_1 R_2 + L_2 R_1}} \right\}_{s=i\omega, s=-i\omega, s=-\frac{R_1 R_2}{L_1 R_2 + L_2 R_1}} \\ &= \frac{L_1 R_2 + L_2 R_1}{\omega} \frac{R_1 + R_2}{\left| Z_1 + Z_2 \frac{\omega^2 M^2}{|Z_2|^2} \right|^2} \left[\sin(\omega t) - \frac{\omega L_1 - \omega L_2 \frac{\omega^2 M^2}{|Z_2|^2}}{R_1 + R_2 \frac{\omega^2 M^2}{|Z_2|^2}} \cos(\omega t) \right] \\ &\quad + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{R_1 R_2}{L_1 R_2 + L_2 R_1} t} \right) \end{aligned}$$

Hierbei wurden die in der Elektrotechnik übliche Abkürzung $Z=R+i\omega L$, sowie $M^2=L_1 L_2$ verwendet. Das Kurvenintegral über den geschlossenen Rand ∂D lässt sich nun wie folgt zerlegen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} ds \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2} \frac{R_2 + sL_2}{s + \frac{R_1 R_2}{L_1 R_2 + L_2 R_1}} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0 - ir}^{s_0 + ir} ds \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2} \frac{R_2 + sL_2}{s + \frac{R_1 R_2}{L_1 R_2 + L_2 R_1}} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} ds \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2} \frac{R_2 + sL_2}{s + \frac{R_1 R_2}{L_1 R_2 + L_2 R_1}} \end{aligned}$$

Offensichtlich ist

$$\left| \frac{R_2 + sL_2}{(s^2 + \omega^2) \left(s + \frac{R_1 R_2}{L_1 R_2 + L_2 R_1} \right)} \right| < \frac{1}{r^2},$$

für $s=s_0+ire^{i\theta}$ und unter Anwendung des *Jourdanschen Lemmas* folgt das Verschwinden des letzten Integrals über den Halbkreis Γ_r für den Grenzübergang $r \rightarrow \infty$. Vergleich ergibt schließlich die Beziehung:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty} ds \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2} \frac{R_2 + sL_2}{s + \frac{R_1 R_2}{L_1 R_2 + L_2 R_1}} = \frac{L_1 R_2 + L_2 R_1}{\omega} \frac{R_1 + R_2 \frac{\omega^2 M^2}{|Z_2|^2}}{\left| Z_1 + Z_2^* \frac{\omega^2 M^2}{|Z_2|^2} \right|^2} \left[\sin(\omega t) - \frac{\omega L_1 - \omega L_2 \frac{\omega^2 M^2}{|Z_2|^2}}{R_1 + R_2 \frac{\omega^2 M^2}{|Z_2|^2}} \cos(\omega t) \right] + O\left(e^{-\frac{R_1 R_2}{L_1 R_2 + L_2 R_1} t} \right)$$

Für den eingeschwungenen Zustand verschwindet der letzte Term, so dass für den Grenzfall $t \rightarrow \infty$, der harmonische Ausdruck übrig bleibt.

Die Umkehrtransformation ergibt somit den folgenden Ausdruck für den Strom im Primärkreis:

$$I_1(t) = \frac{U_0}{\left| Z_1 + Z_2^* \frac{\omega^2 M^2}{|Z_2|^2} \right|} \frac{R_1 + R_2 \frac{\omega^2 M^2}{|Z_2|^2}}{\left| Z_1 + Z_2^* \frac{\omega^2 M^2}{|Z_2|^2} \right|} \left[\sin(\omega t) - \frac{\omega L_1 - \omega L_2 \frac{\omega^2 M^2}{|Z_2|^2}}{R_1 + R_2 \frac{\omega^2 M^2}{|Z_2|^2}} \cos(\omega t) \right]. \quad (3.87)$$

Der auf den ersten Blick recht komplex wirkende Ausdruck lässt sich weiter vereinfachen. Tatsächlich erleidet der Strom in Abhängigkeit von der transformierten Last eine Phasenverschiebung. Unter Verwendung der Ausdrücke

$$I_0 = \frac{U_0}{\left| Z_1 + Z_2^* \frac{\omega^2 M^2}{|Z_2|^2} \right|} \quad (3.88)$$

$$\delta = \arctan\left(\frac{\omega L_1 - \omega L_2 \frac{\omega^2 M^2}{|Z_2|^2}}{R_1 + R_2 \frac{\omega^2 M^2}{|Z_2|^2}} \right)$$

Somit ergibt sich die einfache Beziehung:

$$I_1(t) = I_0 \sin(\omega t - \delta). \quad (3.89)$$

Zur weiterführenden Betrachtung sind noch die elektrischen Größen wie Sekundärstrom $I_2(t)$ und die Sekundärspannung $U_2(t)$ von Bedeutung. Aus der Gleichung für die Laplace-Transformierten Ströme, ergibt sich die Beziehung:

$$\tilde{I}_2(s) = -\frac{sM}{R_2 + sL_2} \tilde{I}_1(s). \quad (3.90)$$

Mit den Polstellen in $s=i\omega$ bzw. $s=-i\omega$ ergibt sich:

$$I_2(\omega) = -\frac{i\omega M}{R_2 + i\omega L_2} I_1(\omega). \quad (3.91)$$

Unter Berücksichtigung von $M=k\sqrt{L_1 L_2}$ und $R_2 \ll \omega L_2$ gilt für das Verhältnis der Ströme im Primärkreis und im Sekundärkreis:

$$\begin{aligned} \frac{I_2(\omega)}{I_1(\omega)} &= -\frac{i\omega M}{R_2 + i\omega L_2} \\ &\approx -\frac{M}{L_2} \\ &= -\frac{k\sqrt{L_1 L_2}}{L_2} \\ &= -k \frac{N_1}{N_2} \end{aligned}$$

In enger Analogie zum idealen Transformator entspricht der transformierte Sekundärstrom dem um das Verhältnis der Windungszahlen N_1/N_2 vervielfachten Primärstrom. Wie zu erwarten ergibt die Berücksichtigung der Kopplung zwischen den Kreisen einen in Abhängigkeit von k geringeren Wert für den induzierten Sekundärstrom.

Transformation des Sekundärstroms:

$$I_2 = k \frac{N_1}{N_2} I_1 \quad (3.92)$$

Eine ganz analoge Überlegung ergibt sich auch für das Verhältnis aus Primärspannung und der im Sekundärkreis induzierten Spannung.

$$\begin{aligned} \frac{U_2(\omega)}{U_1(\omega)} &= \frac{i\omega M}{R_1 + i\omega L_1} \\ &\approx \frac{M}{L_1} \\ &= \frac{k\sqrt{L_1 L_2}}{L_1} \\ &= k \frac{N_2}{N_1} \end{aligned}$$

Auch hier bestätigt sich wieder die Ähnlichkeit des vorliegenden Modells mit dem des idealen Transformators. Unter Berücksichtigung der nicht idealen Kopplung ergibt sich für die induzierte Spannung ein geringerer Wert als im Idealfall.

Transformation der Sekundärspannung:

$$U_2 = k \frac{N_2}{N_1} U_1 \quad (3.93)$$

Der hier vorgestellte mathematische Formalismus, basierend auf dem Transformatormodell, eignet sich vor allen Dingen zur Beschreibung induktiv gekoppelter Kreise mit Frequenzen unterhalb von 100kHz . Im Gegensatz zu HF-Transformatoren ist die Kopplung über die parasitären Spulenkapazitäten vernachlässigbar klein.

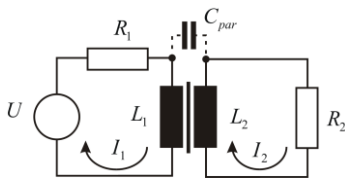


Abb. 4: Überbrückung der Transformatorkopplung durch die parasitäre Spulenkapazität bei der Verwendung von HF.

Wird zur induktiven Kopplung zweier Kreise hingegen HF verwendet, dann stellen selbst Übergangskapazitäten von $10\text{ pF} - 100\text{ pF}$, die leicht in Form von Wickelkapazitäten in Erscheinung treten, einen relativ geringen kapazitiven Blindwiderstand dar. Infolgedessen wird bei höheren Frequenzen eine induktive Transformatorkopplung zum Sekundärkreis immer schwieriger. Ursache sind die Verschiebungsströme die dann über die Kapazität auf den Sekundärkreis übertragen werden und dadurch nicht mehr durch die Induktionsspule fließen. Dadurch wird das Induktionsfeld schwächer und die induktive Kopplung ist nur noch partiell wirksam.

3.7.1 Netzwerkanalyse bei induktiv gekoppelten Kreisen

Das Schaltbild zweier induktiv gekoppelter Kreise lässt sich über eine Transformation der Gegeninduktivität auf ein RL-Netzwerk reduzieren und kann somit der Methodik der Netzwerkanalyse zugänglich gemacht werden. Im Hinblick auf die Eingangsgrößen wie Eingangsspannung, Eingangsstrom und Eingangsimpedanz sind die folgenden Schaltungen äquivalent:

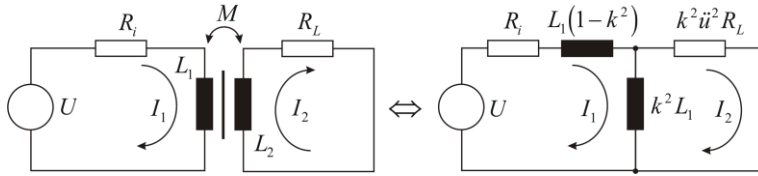


Abb. 5a: Schaltbild für zwei induktiv gekoppelte Kreise.

Abb. 5b: Äquivalentes Netzwerk.

Für den Fall a) ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} R_i + i\omega L_1 & -i\omega M \\ -i\omega M & R_L + i\omega L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

Ist R_i der Innenwiderstand der Spannungsquelle U , dann ergibt sich für das verbliebene Netzwerk die folgende Impedanzmatrix:

$$Z_a = \begin{pmatrix} i\omega L_1 & -i\omega M \\ -i\omega M & R_L + i\omega L_2 \end{pmatrix}. \quad (3.95)$$

Es lässt sich nun die Eingangsimpedanz der Schaltung in a) ermitteln:

$$\begin{aligned} \det(Z_a) &= -\omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 M^2 + i\omega L_1 R_L \\ &= -\omega^2 L_1 L_2 (1 - k^2) + i\omega L_1 R_L \end{aligned}$$

Die Eingangsimpedanz Z_{ea} ist:

$$\begin{aligned} Z_{ea} &= \frac{\det(Z_a)}{\det(Z_a)_{11}} \\ &= -\frac{\omega^2 L_1 L_2 (1 - k^2)}{R_L + i\omega L_2} + \frac{i\omega L_1 R_L}{R_L + i\omega L_2} \end{aligned}$$

Analog dazu lässt sich auch die Schaltung in b) auswerten. Das Netzwerk besitzt die folgende Impedanzmatrix:

$$Z_b = \begin{pmatrix} i\omega L_1 & -i\omega k^2 L_1 \\ -i\omega k^2 L_1 & k^2 \ddot{u}^2 R_L + i\omega k^2 L_1 \end{pmatrix}$$

Der Widerstand R_i wurde hier wieder als Innenwiderstand der Spannungsquelle interpretiert. Es lässt sich nun die Eingangsimpedanz der Schaltung in b) ermitteln:

$$\begin{aligned} \det(Z_b) &= -\omega^2 k^2 L_1^2 + \omega^2 k^4 L_1^2 + i\omega L_1 k^2 \ddot{u}^2 R_L \\ &= -\omega^2 k^2 L_1 (1 - k^2) + i\omega L_1 k^2 \ddot{u}^2 R_L \end{aligned}$$

Die Eingangsimpedanz ist:

$$Z_{eb} = \frac{\det(Z_b)}{\det(Z_b)_{11}}$$

$$= -\frac{\omega^2 L_1 L_2 (1-k^2)}{k^2 \ddot{u}^2 R_L + i\omega k^2 L_1} + \frac{i\omega L_1 k^2 \ddot{u}^2 R_L}{k^2 \ddot{u}^2 R_L + i\omega k^2 L_1}$$

Das Übersetzungsverhältnis \ddot{u} ist definiert als die Quadratwurzel aus dem Verhältnis von Primärinduktivität L_1 zu Sekundärinduktivität L_2 , mit:

Definition: Übersetzungsverhältnis.

$$\ddot{u} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}. \quad (3.96)$$

Aufgrund der Proportionalität $L \sim N^2$, ist leicht einzusehen, dass $\ddot{u} = N_1/N_2$ ist. Somit ergibt sich für die Eingangsimpedanz:

$$Z_{eb} = -\frac{\omega^2 L_1^2 \frac{1}{\ddot{u}^2} (1-k^2)}{R_L + i\omega L_1 \frac{1}{\ddot{u}^2}} + \frac{i\omega L_1 R_L}{R_L + i\omega L_1 \frac{1}{\ddot{u}^2}}$$

$$= -\frac{\omega^2 L_1 L_2 (1-k^2)}{R_L + i\omega L_2} + \frac{i\omega L_1 R_L}{R_L + i\omega L_2}$$

Wegen $Z_{ab} = Z_{eb}$ sind beide Schaltungen äquivalent. Die Transformatorschaltung lässt sich somit auf ein RL-Netzwerk zurückführen. Dies vereinfacht die Analyse der Eigenschaften des Systems vor allen Dingen was das Frequenzverhalten anbetrifft.

In der Mittel- und Hochfrequenztechnik ist es oft nötig eine Impedanzanpassung durchzuführen, damit die Leistung einer Quelle mit einem gegebenen Innenwiderstand optimal an eine Last übertragen werden kann. Für den Fall idealer Kopplung gilt:

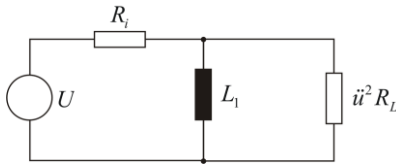


Abb. 6: Transformator mit idealer Kopplung.

Eine Impedanzanpassung liegt vor, wenn $R_i = \ddot{u}^2 R_L$ ist und die Induktivität so gewählt wird, dass gilt:

$$\omega L_1 \gg \ddot{u}^2 R_L. \quad (3.97)$$

Diese Bedingung sollte stets beachtet werden, wenn ein technisch sinnvoller Transformator aufgebaut werden soll. In der Praxis sind Werte von $\omega L_1 \sim 10 \ddot{u}^2 R_L$ bis $\omega L_1 \sim 100 \ddot{u}^2 R_L$ üblich.

Wichtig beim Einsatz eines Übertragers sind sein Frequenzverhalten und dessen Abhängigkeit von der Kopplung. Dies spielt vor allen Dingen bei Tonfrequenzübertragern eine Rolle, die eine Impedanzanpassung über einen möglichst breiten Frequenzbereich vornehmen müssen. Bei der Analyse muss in betracht gezogen werden, dass für reale Transformatoren stets $k < 1$ gilt.

Für niedrige Frequenzen kann die Induktivität in Reihe mit R_i aufgrund des Faktors $(1-k^2)$ vernachlässigt werden. Es ergibt sich die folgende Äquivalenzschaltung:

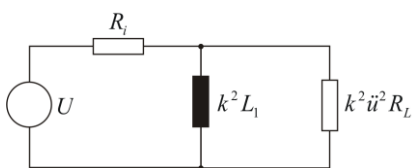


Abb. 7: Äquivalenzschaltung des Transformators bei niedrigen Frequenzen.

Die Schaltung verhält sich wie ein Hochpassfilter. Niedrige Frequenzen werden durch die Induktivität $k^2 L_1$ kurzgeschlossen. Für den Fall

$$\omega_u k^2 L_1 = R_i,$$

ergibt sich eine untere Grenzfrequenz ω_u unterhalb derer der Strom durch L_1 größer wird als durch $\ddot{u}^2 R_L$ und ein technisch sinnvoller Übertragerbetrieb nicht mehr gewährleistet werden kann. Umformen ergibt:

$$\omega_u = \frac{R_i}{k^2 L_1}.$$

Untere Grenzfrequenz für einen Übertrager:

$$\omega_u = \frac{R_i}{k^2 L_1}. \quad (3.98)$$

Umgekehrt macht sich bei sehr hohen Frequenzen die Induktivität $L_1(1-k^2)$ als Serienwiderstand zu R_i und $\ddot{u}^2 k^2 R_L$ bemerkbar. Infolgedessen wird weniger Leistung an die Last übertragen. Für den Fall

$$\omega_o (1-k^2) L_1 = R_i$$

ergibt sich eine obere Grenzfrequenz. Die Induktivität wirkt wie ein Tiefpass.

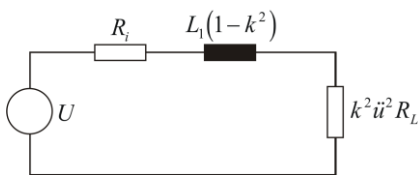


Abb. 8: Äquivalenzschaltung des Transformators bei hohen Frequenzen.

Bei höher werdenden Frequenzen als ω_o wird der Spannungsabfall an $\ddot{u}^2 k^2 R_L$ kleiner als an $\omega L_1(1-k^2)$. Umformen des Ausdrucks für die oberste Grenzfrequenz ergibt:

$$\omega_o = \frac{R_i}{L_1(1-k^2)}.$$

Oberste Grenzfrequenz für einen Übertrager:

$$\omega_o = \frac{R_i}{L_1(1-k^2)}. \quad (3.99)$$

Zusammenfassend zeigt ein Übertrager ein ähnliches Verhalten wie das eines Bandpassfilters bzw. einer Wien-Brücke. Das Verhältnis ω_o/ω_u definiert ein Maß für die Bandbreite des Übertragers:

$$\frac{\omega_o}{\omega_u} = \frac{k^2}{1-k^2}. \quad (3.100)$$

Je besser die Kopplung zwischen Primär- und Sekundärinduktivität ist, umso breiter ist der Frequenzbereich, bei dem eine Impedanzanpassung vorgenommen werden kann. Bei Kerntransformatoren liegen typische Werte von k bei:

$$k_{\text{Kern}} \approx 0.95..0.99.$$

Werte oberhalb von 0.99 sind nur noch mit großem Aufwand bei der Wickeltechnik bzw. mit sehr großen Transformatoren zu erreichen. Bei Lufttransformatoren ist die Kopplung beträchtlich schlechter, mit typischen Werten von:

$$k_{L_{eff}} \approx 0.1 \dots 0.8.$$

Beispiel: Ein 50W Röhrenverstärker mit einem Innenwiderstand von $R_i = 1k\Omega$ soll über einen Audioübertrager an einen 4Ω Lautsprecher angeschlossen werden.

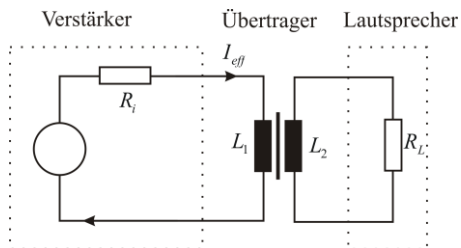


Abb. 9: Röhrenverstärker mit Übertrager und Lautsprecher.

- a) Es sollen L_1 und L_2 bemessen werden um eine optimale Impedanzanpassung bei 500Hz vorzunehmen. Aus der Bedingung $\omega L_1 \sim 30 \cdot \ddot{u}^2 R_L$ lässt sich die Induktivität L_2 determinieren:

$$\begin{aligned} \omega L_1 &= 30 \ddot{u}^2 R_L \\ &= 30 \frac{L_1}{L_2} R_L \\ L_2 &= 30 \frac{R_L}{\omega} \\ &= 30 \frac{4\Omega}{2\pi \cdot 500\text{Hz}} \\ &= 0.04\text{H} \end{aligned}$$

Der gesamte ohmsche Widerstand des Elements ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} R_{ges} &= R_i + k^2 \ddot{u}^2 R_L \\ &= R_i + R'_L \end{aligned}$$

Die Bedingung der Impedanzanpassung impliziert, dass gilt:

$$\begin{aligned} R_i &= R'_L \\ R_i &= k^2 \ddot{u}^2 R_L \\ &= k^2 \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 R_L \end{aligned}$$

Folglich gilt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 &= \frac{L_1}{L_2} \\ &= \frac{1}{k^2} \frac{R_i}{R_L} \\ &\cong \frac{R_i}{R_L} \end{aligned}$$

Somit ist L_1 gegeben durch:

$$L_1 = L_2 \frac{R_i}{R_L}$$

$$\approx 10H$$

- b) Der Kopplungsfaktor k des Übertragers für den Frequenzbereich von 100Hz bis zur oberen Grenzfrequenz von 10kHz stellt eine Mindestvoraussetzung für die angestrebte Anwendung dar. Es gilt:

$$\frac{\omega_o}{\omega_u} = \frac{2\pi \cdot 10kHz}{2\pi \cdot 0.1kHz}$$

$$= 100$$

$$= \frac{k^2}{1-k^2}$$

Somit gilt für die Kopplung k :

$$k = \sqrt{\frac{100}{100+1}}$$

$$= 0.995$$

Eine derartige Kopplung ist selbst mit Kerntransformatoren keine triviale Angelegenheit, insbesondere dann, wenn auch noch ein relativ breiter Frequenzbereich möglichst ohne Verzerrung übertragen werden soll.

- c) Der Effektivstrom I_{eff} bei maximaler Belastung im Verstärker lässt sich aus der Eingangsimpedanz bestimmen. Es gilt:

$$I_0 = \frac{U_0}{\left| Z_1 + Z_2^* \frac{\omega^2 M^2}{|Z_2|^2} \right|}$$

Es gilt:

$$Z_1 = R_i + i\omega L_1$$

$$Z_2 = R_L + i\omega L_2$$

$$Z_2^* = R_L - i\omega L_2$$

$$M^2 = k^2 L_1 L_2$$

Optimale Impedanzanpassung soll bei 1 kHz vorliegen. Einsetzen der gegebenen Werte ergibt:

$$|Z| \cong 2492\Omega$$

Leistung und Impedanz sind nun gegeben. Daraus folgt:

$$I_0 = \sqrt{\frac{2P}{|Z|}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 50W}{2492\Omega}}$$

$$= 0.2A$$

$$= 200mA$$

Für den Effektivstrom ergibt sich:

$$I_{eff} = 142mA$$