

## 4.1 LADUNGSTRANSPORT IN FESTKÖRPERN

Die Kenntnis über die Mechanismen, die zum Transport von Ladungen im Festkörper führen, ist wesentlich für das Verständnis der Funktionsweise von Bauelementen und Schaltungen. Dies gilt im besonderen Maße für Halbleiter. Generell hängt die elektrische Leitfähigkeit eines Stoffes von der Anzahl seiner freien Ladungsträger und deren Beweglichkeit ab. Die Leitfähigkeit  $\sigma$  eines Stoffes ist eine makroskopische Größe und gegeben durch:

Leitfähigkeit:

$$\sigma = e(\mu_p p + \mu_n n). \quad (4.1)$$

Hierbei ist  $n$  die Dichte der negativen Ladungsträger und  $\mu_n$  deren Beweglichkeit, sowie  $p$  die Dichte der positiven Ladungsträger und  $\mu_p$  deren Beweglichkeit. Die Beweglichkeit  $\mu$  eines Ladungsträgers ist definiert als:

Beweglichkeit:

$$\mu = \frac{|q|}{m} \tau. \quad (4.2)$$

Wobei  $\tau$  die so genannte *Relaxationszeit* innerhalb des zugehörigen Materials ist. Der Zusammenhang zwischen einem abliegenden elektrischen Feld  $\mathbf{E}$  und der Stromdichte  $\mathbf{J}$  in einem Festkörper folgt aus dem allgemeinen *Ohmschen Gesetz* in vektorieller Form:

Ohmsches Gesetz:

$$\mathbf{J} = \sigma \cdot \mathbf{E}. \quad (4.3)$$

Da die Beweglichkeit von freien Ladungsträgern in einem Festkörper begrenzt ist, ergibt sich die Leitfähigkeit maßgeblich aus deren Dichte. Entscheidend hierfür ist die Größe der *Bindungsenergie*, mit der die *Valenzelektronen* der Festkörperatome gebunden sind. Aus der elementaren Quantentheorie folgt, dass beim Einzelatom die Elektronen nur diskrete Energieniveaus annehmen können. Fügt man zwei Atome zu einem Paar zusammen, kommt es aufgrund des *Pauli-Prinzips* zu einer *Aufspaltung* der einzelnen Energieniveaus. Die Überlagerung der zahlreichen elektrischen Felder in einem Festkörper führt zu einer multiplen Aufspaltung sehr dicht beieinander liegender Energieniveaus, die man als *Energiebänder* zusammenfasst. Diese sind umso breiter, je stärker sich die Elektronen gegenseitig beeinflussen. Infolgedessen ist das Energieband der Valenzelektronen relativ breit, während die Elektronen auf den inneren Schalen weniger stark vom Kernpotential abgeschirmt werden. Eine quantitative Aussage hierüber liefert die Quantenmechanik über das *Kroenig-Penney-Modell*. Im Hinblick auf die elektrische Leitung ist lediglich das *Valenzband* von Interesse, da nur hier die Möglichkeit besteht, durch Zufuhr relativ kleiner Energien, ein Valenzelektron zu lösen und damit frei beweglich im Festkörper zu machen. Die Gesamtheit aller Energien, die freie Elektronen in einem Festkörper annehmen können, fasst man im *Leitungsband* zusammen.

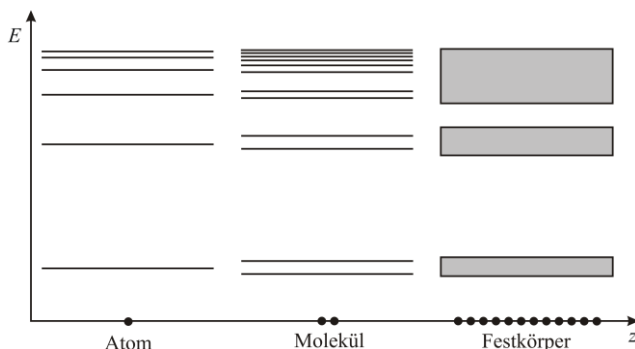


Abb. 1: Bändermodell zur Aufspaltung der diskreten Energieniveaus beim Übergang vom einzelnen Atom zum Vielteilchensystem.

Valenz- und Leitungsband sind im Allgemeinen durch eine verbotene Zone endlicher Breite voneinander getrennt. Diese Zone heißt Bandabstand  $E_g$  und entspricht der Differenz aus dem untersten Energieniveau des Leitungsbands  $E_C$  und dem obersten Energieniveau des Valenzbands  $E_V$ .

Bandabstand:

$$E_g = E_C - E_V \quad (4.4)$$

Die Breite dieses Bandabstands ist entscheidend dafür, ob es sich bei dem Festkörper um ein *Metall*, einen *Isolator*, oder einen *Halbleiter* handelt.

- **Metalle:**

Bei Metallen überlappt sich, aufgrund der hohen Packungsdichte der Atome, Valenz- und Leitungsband, so dass praktisch jedes Gitteratom ein Elektron ins Leitungsband abgibt. Die Anzahl der freien Elektronen entspricht in guter Näherung der Anzahl der Gitteratome.

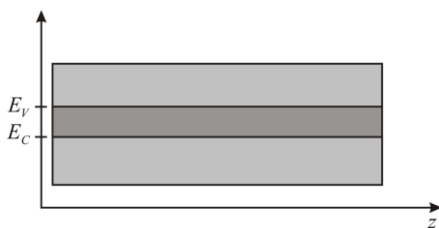


Abb. 2: Überlappung von Valenz- und Leitungsband in einem Metall.

Das Leitungsband ist somit stets mit frei beweglichen Elektronen gefüllt und man spricht von einem *Elektronengas* im Metall.

- **Isolatoren:**

Isolatoren sind definiert als Substanzen, deren Bandabstand größer als 3 eV ist. Selbst bei höheren Temperaturen gibt es kaum freie Ladungsträger im Leitungsband.

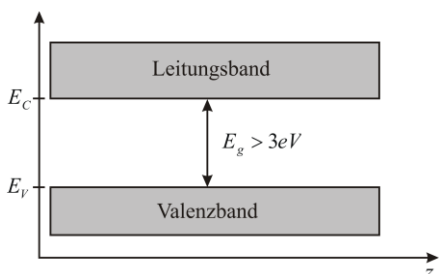


Abb. 3: Leitungs- und Valenzband bei einem Isolator.

Der Sachverhalt ändert sich erst signifikant oberhalb der zugehörigen Schmelztemperatur.

- **Halbleiter:**

Bei Halbleitern liegt der Bandabstand im Bereich von  $E_g \sim 1$  eV. Aufgrund der statistischen Energieverteilung der Elektronen, gibt es bei finiten Temperaturen stets eine gewisse Anzahl von Elektronen innerhalb des Valenzbands, die eine thermische Energie  $E_{th} > E_g$  besitzen und in das Leitungsband wechseln.

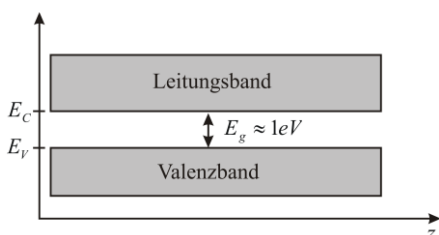


Abb. 4: Leitungs- und Valenzband bei einem Halbleiter.

Bei höher werdenden Temperaturen steigt die Anzahl der Elektronen, die die Bedingung  $E_{th} > E_g$  erfüllen exponentiell an, so dass Halbleiter bei Temperaturen deutlich unterhalb des Schmelzpunktes einen signifikanten Leitwert besitzen.

Typische Halbleiter sind Elemente der *IV. Hauptgruppe*, wie *Silizium* oder *Germanium* mit Bandabständen von:

$$E_{gSi} = 1.1eV$$

$$E_{gGe} = 0.7eV$$

Ein weiterer Halbleiter ist *GaAs* mit einem Bandabstand von  $E_{gGaAs} = 1.4 eV$ .

Für technisch verwertbare Bauelemente ist eine starke Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit nicht wünschenswert. Deshalb wird die Leitfähigkeit von Halbleitern durch *Dotierung* gezielt manipuliert. Dies ist möglich durch den relativ kleinen Bandabstand bei Halbleitern, was die Sonderstellung dieser Stoffe zwischen Metallen und Isolatoren begründet.

Bei der Dotierung bringt man in das Kristallgitter des Siliziums bzw. des Germaniums Fremdatome ein, die entweder *5 Valenzelektronen* (Phosphor, Arsen) oder *3 Valenzelektronen* (Bor) besitzen. Dadurch entstehen so genannte *n-dotierte Halbleiter* oder *p-dotierte Halbleiter*.

- n-Dotierung:

Für den Fall der n-Dotierung werden Atome mit 5 Valenzelektronen in das Siliziumgitter eingebaut. Das 5-te Valenzelektron wird nicht für eine Bindung gebraucht und kann deshalb mit geringen Energieaufwand  $E \sim 0.01 eV$  aus dem Valenzband in das Leitungsband überführt werden.

Der Halbleiter hat im Fall der n-Dotierung als freie Ladungsträger negativ geladene Teilchen (Elektronen) und wird *n-leitend* oder *n-Typ Halbleiter* genannt.

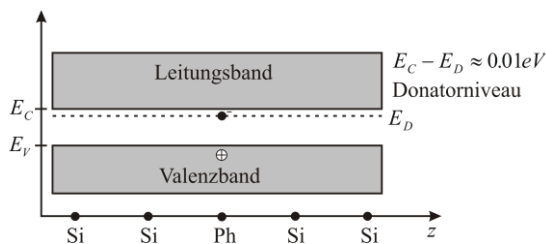


Abb. 5: Energiebänder und Donatorniveau beim n-dotierten Halbleiter.

Das Dotierungsatom heißt *Donator* und die Dichte der Donatoren wird *Donatorkonzentration*  $n_D$  genannt. Man nennt die Elektronen im n-Halbleiter *Majoritätsträger* und die Löcher *Minoritätsträger*.

- p-Dotierung:

Wird an den Gitterplatz eines Si-Atoms in einem Halbleiter ein dreiwertiges Atom eingebracht, dann fehlt ein Valenzelektron in der Bindung. Durch Zufuhr von relativ kleinen Energien  $E \sim 0.01 eV$  kann ein normales Valenzelektron an das Dotierungsatom gebunden werden.

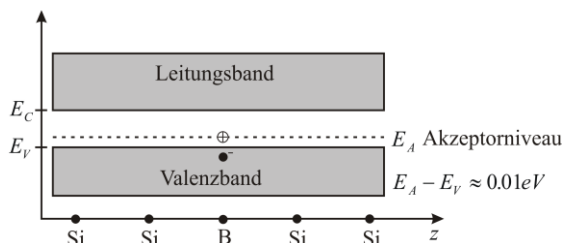


Abb. 6: Energiebänder und Akzeptorniveau beim p-dotierten Halbleiter.

Der Halbleiter hat im Fall der p-Dotierung als freie Ladungsträger positiv geladene Teilchen, so genannte *Defektelektronen* oder *Löcher*. Es handelt sich dann um einen *p-leitenden Halbleiter* oder *p-Typ Halbleiter*. Das Dotierungsatom heißt *Akzeptor*, weil es eine positive Störstelle gespendet hat. Die Dichte der Akzeptoren heißt *Akzeptorkonzentration*  $n_A$ . In einem p-dotierten Halbleiter sind die positiven Störstellen die *Majoritätsträger* und die fest gebundenen Elektronen die *Minoritätsträger*.

#### 4.1.1 Ideales Fermigas in Metallen

Aus dem quantenmechanischen Befund folgt, dass sich in Metallen das Valenzband und das Leitungsband überlappen. Die zugehörigen Elektronen können mit dem Instrumentarium der Quantenstatistik näherungsweise als *ideales Fermigas* beschrieben werden. Eine quantitative Aussage über die Energieverteilung der Elektronen im Leitungsband eines Metalls liefert die *Fermiverteilung*.

##### Fermiverteilung:

Die Fermiverteilung gibt die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Elektrons mit der Energie  $E$  in Abhängigkeit von der Temperatur  $T$  an.

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right)} \quad (4.5)$$

Die *Fermienergie*  $E_F$  ist definiert als jene Energie, bei der die Verteilung den Wert  $f(E_F) = 1/2$  annimmt. In Metallen liegt die Fermienergie im Bereich von  $E_F \sim 10$  eV.

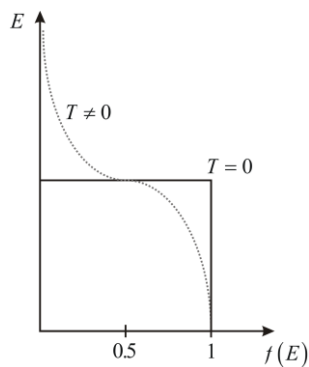


Abb. 7: Qualitativer Verlauf der Fermiverteilung für  $T=0$  und  $T \neq 0$ .

In der Quantenstatistik wird noch eine *Zustandsdichte*  $g(E)$  definiert, so dass sich die Gesamteilchendichte  $n$  aus

$$n = \int_0^{+\infty} dE g(E) f(E).$$

ergibt. Die Zustandsdichte gibt die Anzahl der möglichen Zustände je Volumen- und Energieeinheit an. Für die Dichte der Elektronen im Leitungsband  $n_{e0}$  interessieren die Elektronen mit einer Energie  $E > E_C$ . Folglich gilt:

$$n_{e0} = \int_{E_C}^{+\infty} dE g(E) f(E).$$

Da im Metall  $E_C < E_V$  ist, kann gezeigt werden, dass in guter Näherung

$$n_{e0} \approx n,$$

gilt. Dies ist gleichbedeutend mit der Feststellung, dass die Elektronendichte im Leitungsband der Packungsdichte  $n$  der Atome im Metall entspricht.

##### Leitfähigkeit von Metallen:

$$\sigma = e \mu n. \quad (4.6)$$

Typische Werte für die Beweglichkeit  $\mu$  liegen im Bereich von  $10^{-3} \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ , woraus sich mit Festkörperdichten im Bereich von  $10^{23} \text{ cm}^{-3}$  die hohen Leitfähigkeiten von Metallen erklären. Die Verringerung der Leitfähigkeit bei höheren Temperaturen folgt aus der Proportionalität von  $\mu \sim T^{-3/2}$ .

Neben der Leitfähigkeit lassen mit Hilfe der Quantenstatistik einige sehr interessante Effekte in Leitern erklären.

**Beispiel:** Richardson Effekt.

Das Modell eines idealen Fermigas ermöglicht es die thermische Emission von Elektronen aus einer Metalloberfläche zu erklären und quantitativ zu erfassen. Das Austreten von Elektronen aus einer geheizten Metalloberfläche ist als *Richardson-Effekt* bekannt und konnte erst mit Hilfe der Quantenstatistik zufrieden stellend erklärt werden. In dem zugrunde liegenden Modell stellt die Metalloberfläche eine Potentialbarriere  $W$  dar, die von den Elektronen im Leitungsband überwunden werden muss.

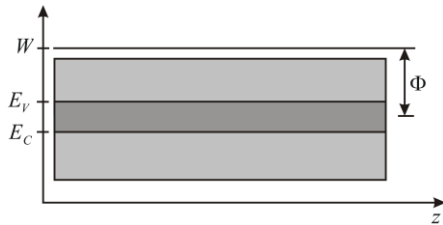


Abb. 8: Energiebänder im Metall und die Austrittsarbeit  $\Phi=W-E_F$ .

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Elektronen, die auf das Flächenelement  $dA_z$  mit einer Energie

$$E_{p_z} > W$$

auftreffen, das Metall auch verlassen. Für den Richardson-Effekt ist der mittlere Teilchenstrom normal zur Metalloberfläche verantwortlich:

$$\Gamma_z = \frac{1}{V} \sum_{\lambda} \langle n_{p_{z\lambda}} \rangle^F v_{z\lambda}$$

Die Summe über  $\lambda$  erstreckt sich dabei über alle möglichen quantenmechanischen Zustände, die die Elektronen annehmen können. Dies beinhaltet auch die Summation über die möglichen Spinzustände. Die Indizierung  $F$  deutet lediglich darauf hin, dass eine Fermistatistik zugrunde liegt. Es gilt demnach:

$$\begin{aligned} \Gamma_z &= \frac{1}{V} \sum_{\lambda \uparrow \downarrow} \langle n_{p_{z\lambda}} \rangle^F v_{z\lambda} \\ &= \frac{2}{V} \sum_{\lambda} \langle n_{p_{z\lambda}} \rangle^F v_{z\lambda} \\ &\approx \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{m} \int_{\Omega} d^3 p p_z \frac{1}{1 + \exp(\beta(E_p - E_F))} \\ &= \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{m} \int_0^{+\infty} dp_x \int_0^{+\infty} dp_y \int_{\sqrt{2mW}}^{+\infty} dp_z p_z \frac{1}{1 + \exp(\beta(\frac{p^2}{2m} - E_F))} \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{m} \int_{\sqrt{2mW}}^{+\infty} dp_z p_z \int_0^{+\infty} dp p \frac{1}{1 + \exp(\beta(\frac{p^2 + p_z^2}{2m} - E_F))} \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} k_B T \int_{\sqrt{2mW}}^{+\infty} dp_z p_z \ln\left(1 + \exp\left(-\beta\left(\frac{p_z^2}{2m} - E_F\right)\right)\right) \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} m k_B T \int_W^{+\infty} dE \ln\left(1 + \exp(-\beta(E - E_F))\right) \end{aligned}$$

Für die Untersuchung der thermischen Emission ist  $T < 3000$  K und die Austrittsarbeit  $\Phi$  liegt im Bereich von einigen eV. Somit kann der Logarithmus entwickelt werden:

$$\ln(1 + \exp(-\beta(E - E_F))) \approx \exp\left(-\frac{E - E_F}{k_B T}\right).$$

Folglich gilt:

$$\begin{aligned}\Gamma_z &\approx \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} m k_B T \int_W^{+\infty} dE \exp\left(-\frac{E - E_F}{k_B T}\right) \\ &= \frac{4\pi m}{(2\pi\hbar)^3} (k_B T)^2 \exp\left(-\frac{W - E_F}{k_B T}\right) \\ &= \frac{4\pi m}{(2\pi\hbar)^3} (k_B T)^2 \exp\left(-\frac{\Phi}{k_B T}\right)\end{aligned}$$

Multiplikation mit der Elementarladung  $e$  ergibt dann eine elektrische Stromdichte, die als *Richardson-Stromdichte* bekannt ist:

Richardson-Stromdichte:

$$J_z = e \frac{4\pi m}{(2\pi\hbar)^3} (k_B T)^2 \exp\left(-\frac{\Phi}{k_B T}\right). \quad (4.7)$$

Die Austrittsarbeit ist stark Materialabhängig. In der folgenden Tabelle ist  $\Phi$  für einige Metalle angegeben:

Tab. 1: Austrittsarbeit einiger Metalle.

Stoff	$\Phi / eV$
W	4.54
Mo	4.16
Ag	4.05
Cu	4.39
BaO	0.99
Cs-Film auf W	1.36

**Beispiel:** Schottky-Effekt.

Der *Schottky-Effekt* beschreibt die Verringerung der Austrittsarbeit in einem Metall durch das Anlegen eines äußeren elektrischen Feldes.

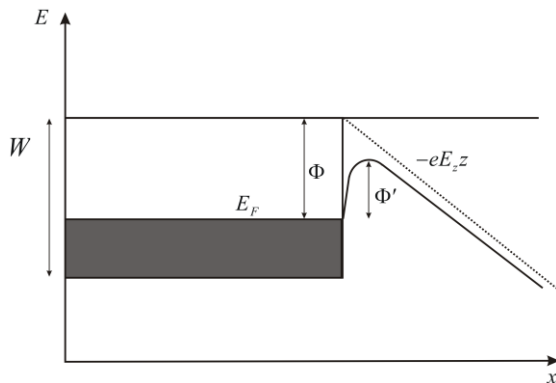


Abb. 9: Energiebandschema zum Schottky-Effekt

Für das Modell eines konstanten elektrischen Feldes kann das Potential durch  $-eE_z z$  angenommen werden. Hinzu kommt noch ein attraktives Bildpotential, wenn die Elektronen das Metall verlassen.

$$-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4z}$$

Ist  $W$  die Gesamtenergie, die aufgebracht werden muss, damit die Elektronen das Metall verlassen können, dann gilt:

$$\Delta E = W - eE_z z - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4z}$$

Differentiation des Ausdrucks ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial z} \Delta E = -eE_z + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{4z^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \Delta E = 0$$

$$\Rightarrow z^2 = \frac{e}{16\pi\epsilon_0 E_z}$$

$$\Rightarrow z_0 = \sqrt{\frac{e}{16\pi\epsilon_0 E_z}}$$

An der Stelle  $z_0$  ist die Potentialbarriere maximal. Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} \Delta E_{\max} &= W - eE_z z_0 - \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 z_0} \\ &= W - \sqrt{\frac{e^3 E_z}{4\pi\epsilon_0}} \end{aligned}$$

Es lässt sich nun eine modifizierte Austrittsarbeit definieren, so dass gilt:

$$\begin{aligned} \Phi' &= \Delta E_{\max} - E_F \\ &= \Phi - \sqrt{\frac{e^3 E_z}{4\pi\epsilon_0}} \end{aligned}$$

Einsetzen in die Richardson-Gleichung für die Stromdichte ergibt:

$$J_z = e \frac{4\pi m}{(2\pi\hbar)^3} (k_B T)^2 \exp\left[-\frac{1}{k_B T} \left(\Phi - \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}} \sqrt{E_z}\right)\right]$$

Die Austrittsarbeit lässt sich durch ein extern angelegtes elektrisches Feld verringern. Je stärker das Feld, umso größer wird der Emissionsstrom bei einer gegebenen Temperatur. Bei sehr hohen Feldstärken macht sich noch der quantenmechanische Tunneffekt bemerkbar, der dazu führt, dass vermehrt Elektronen durch die Potentialbarriere tunneln können.

Die Feldstärke kann so stark werden dass die Austrittsarbeit effektiv verschwindet. Es gilt dann:

$$\Phi - \sqrt{\frac{e^3}{4\pi\epsilon_0}} \sqrt{E_z} = 0$$

Für einen Wert von  $\Phi = 4\text{eV}$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{4\pi\epsilon_0 \Phi^2}{e^3} \\ &\approx 11\text{GV} / \text{m} \end{aligned}$$

Bei solchen Feldstärken tritt Feldemission auf. Der quantenmechanische Tunneffekt bewirkt allerdings noch eine Verringerung der hierzu notwendigen Feldstärke.

## 4.2 PN-ÜBERGANG UND DIODE

In einem Festkörper ist das Fermi-Niveau  $E_F$  dasjenige Energieniveau, welches am absoluten Nullpunkt die besetzten und die unbesetzten Elektronenzustände voneinander trennt. Alle tiefer gelegenen Zustände sind vollständig besetzt, alle höher gelegenen Zustände sind unbesetzt. Steigt die Temperatur an, werden einige Elektronen aus den Energieniveaus unterhalb von  $E_F$  angeregt und wechseln in Energieniveaus oberhalb von  $E_F$ . Bei *intrinsischen Halbleitern* (undotierte Halbleiter) trennt das Fermi-Niveau nicht mehr besetzte- und unbesetzte Zustände sauber voneinander, da  $E_F$  zwischen dem Valenz- und Leitungsband liegt; fungiert aber weiterhin als Referenzenergie. Es kann gezeigt werden, dass  $E_F$  in guter Näherung genau in der Mitte der Bandlücke liegt:

$$E_F \cong E_V + \frac{E_g}{2}. \quad (4.8)$$

Die folgende Abbildung zeigt das Bandmodell und die zugehörige Verteilung für  $T=0$  und  $T \neq 0$  in einem intrinsischen Halbleiter.

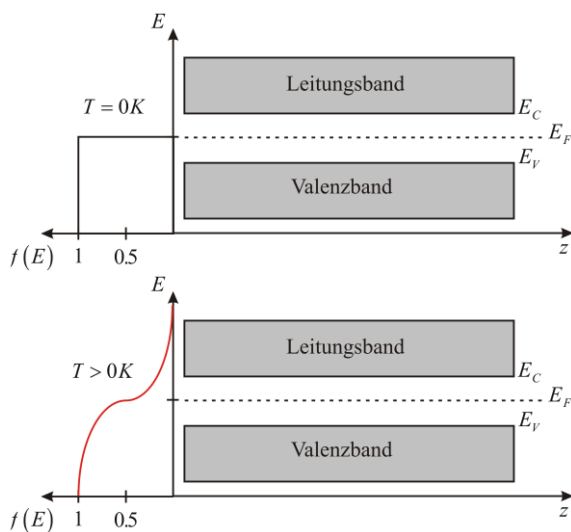


Abb. 1: Lage des Fermi-Niveaus in einem intrinsischen Halbleiter und qualitativer Verlauf der Fermiverteilung.

Da in einem intrinsischen Halbleiter immer ein Eins-zu-eins-Verhältnis zwischen Löchern und Leitungselektronen besteht, bleibt die Lage von  $E_F$  in der Mitte der Bandlücke unverändert. Aus der Quantenstatistik folgt, dass die Elektronendichte im Leitungsband eines intrinsischen Halbleiters gegeben ist durch:

$$n_i = \int_{E_C}^{+\infty} dE g(E) f(E). \quad (4.9)$$

Für  $T > 0K$  kann gezeigt werden, dass in guter Näherung gilt:

$$n_i(T) = C (k_B T)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{E_C - E_F}{k_B T}\right). \quad (4.10)$$

Mit der Konstante  $C$ , die prinzipiell aus der zugrunde liegenden Theorie hergeleitet werden kann und vom Material abhängig ist. Für die gängigsten Halbleiter Silizium und Germanium ist die intrinsische Elektronendichte im Leitungsband gegeben durch:



Dichte der Elektronen im Leitungsband:

$$n_{iSi}(T) \approx 3.88 \cdot 10^{16} K^{-\frac{3}{2}} cm^3 \cdot T^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{7000K}{T}\right) \quad (4.11)$$

$$n_{iGe}(T) \approx 1.76 \cdot 10^{16} K^{-\frac{3}{2}} cm^3 \cdot T^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{4550K}{T}\right)$$

Bei Zimmertemperatur  $T=300K$  ergeben sich die folgenden Werte:

$$n_{iSi}(T)|_{T=300K} \approx 1.5 \cdot 10^{10} cm^3$$

$$n_{iGe}(T)|_{T=300K} \approx 2.4 \cdot 10^{13} cm^3$$

Aufschlussreich ist hier ein Vergleich mit der Packungsdichte der Atome in einem Si- bzw. Ge- Kristall.

$$n_{0Si} = \frac{N_A}{M_A} \rho_{Si}$$

$$= \frac{6.02 \cdot 10^{23} mol^{-1}}{28 g / mol} 2.33 g / cm^3$$

$$= 5 \cdot 10^{22} cm^{-3}$$

Die Elektronendichte im Leitungsband bei Zimmertemperatur in Si entspricht somit etwa dem  $10^{-12}$ -ten Teil der typischen Elektronendichte in Metallen. Bei Ge ergibt sich praktisch kein Unterschied zu Si und der Sachverhalt ist ganz analog. Wegen  $\mu \sim T^{-3/2}$  ergibt sich für die Leitfähigkeit:

$$\sigma(T) = \sigma_0 e^{-\frac{E_C - E_F}{k_B T}} \quad (4.12)$$

Intrinsische Halbleiter sind bei Zimmertemperatur demnach schlechte Leiter. Der Sachverhalt ändert sich allerdings schlagartig bei dotierten Halbleitern. Bedingt durch den beispielsweise bei n-Typ Halbleitern geringen Abstand zwischen Donatorniveau und Leitungsband von  $E_C - E_D \sim 0.01$  eV, befinden sich bei Zimmertemperatur  $k_B T \sim 0.03$  eV praktisch alle Elektronen aus den Donatoren-Niveaus im Leitungsband.

Bei technischen Halbleitern werden Dotierungsdichten von  $10^{15} cm^{-3}$  bis  $10^{18} cm^{-3}$  erreicht. Somit ist jedes  $10^6$  bis  $10^9$  Atome im dotierten Halbleiter ein Fremdatom. In diesem Fall überwiegen im Leitungsband die Elektronen aus den Donator-Niveaus. Bei nicht allzu hohen Temperaturen  $T > 600$  K gilt:

Elektronendichte im Leitungsband eines n-Leiters:

$$n_e \approx n_D \quad ; \text{für } T < 600K \quad (4.13)$$

Die folgende Abbildung zeigt das Bandschema und die Verteilung in einem n-dotierten Halbleiter.

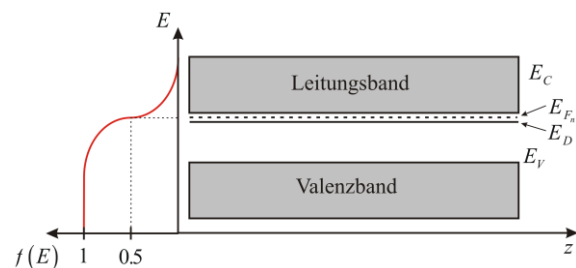


Abb. 2: Lage des Fermi-Niveaus  $E_{Fn}$  in einem n-dotierten Halbleiter.

Bei p-dotierten Halbleitern ist der Sachverhalt ähnlich. Hier werden die Löcher, bzw. die Defektelektronen durch Zufuhr thermischer Energie aus dem Akzeptor-Niveau in das Valenzband angeregt.

Zusammenfassend lässt sich die Leitfähigkeit von Halbleitern sowohl durch Erwärmung als auch Dotierung erhöhen. Bei Zimmertemperatur hat die Dotierungsdichte einen wesentlich größeren Einfluss auf die Leitfähigkeit.

Viele technische Halbleiterbauelemente enthalten als Kernstück je einen kleinen Einkristall, der zwei oder mehr Zonen unterschiedlicher Dotierung umfasst. Ein Grundelement solcher Halbleiterbauelemente ist der *pn-Übergang*.

Fügt man einen n-Typ-Halbleiter und einen p-Typ-Halbleiter zusammen, dann diffundieren Elektronen aufgrund des Konzentrationsgefälles aus dem n-Bereich in den p-Bereich, ebenso die Defektelektronen aus dem p-Bereich in den n-Bereich. Es entstehen entlang der Grenzfläche zwischen den unterschiedlich dotierten Halbleitern, Raumladungszonen, die arm sind an freien Ladungsträgern und im n-Bereich aus positiven Donatorionen-, im p-Bereich aus negativen Akzeptorionen bestehen. Die beiden Raumladungszonen bilden zusammen eine *Verarmungsschicht* oder *Sperrschicht*, deren integrale Gesamtladung verschwindet. Der Gleichgewichtszustand wird durch das sich aufbauende elektrische Feld und einen daraus resultierenden *Konvektionsstrom* hergestellt. Das Integral über die Feldstärke innerhalb der Sperrschicht definiert die *Diffusionsspannung*  $U_D$ .

Definition: Diffusionsspannung.

$$U_D := \int_{a_p}^{b_n} d\sigma \cdot \mathbf{E} \cdot \quad (4.14)$$

Hierbei ist  $a_p$  ein Punkt im p-dotierten Halbleiter und  $b_n$  ein Punkt im n-dotierten Halbleiter. Sie kennzeichnen die Grenzen der Verarmungsschicht (siehe Abb. 3). Ohne äußere Spannungsquelle verschwindet die Summe aus Diffusionsstrom und Konvektionsstrom. Es gilt:

$$I_{Kon} + I_{Diff} = 0. \quad (4.15)$$

Da die Fermi-Niveaus im Halbleiter unbeeinflusst bleiben, kann deren Angleichung im Übergangsbereich nur durch eine *Bandverbiegung* erfolgen. Hierbei werden die Energiebänder des p-Bereichs relativ zum n-Bereich angehoben. Dies folgt aus der Tatsache, dass der p-Bereich durch den Abfluss der Majoritätsträger negativ geworden ist und somit ein Elektron im Leitungsband des p-Bereichs eine höhere Energie besitzt als ein Elektron im Leitungsband des n-Bereichs.

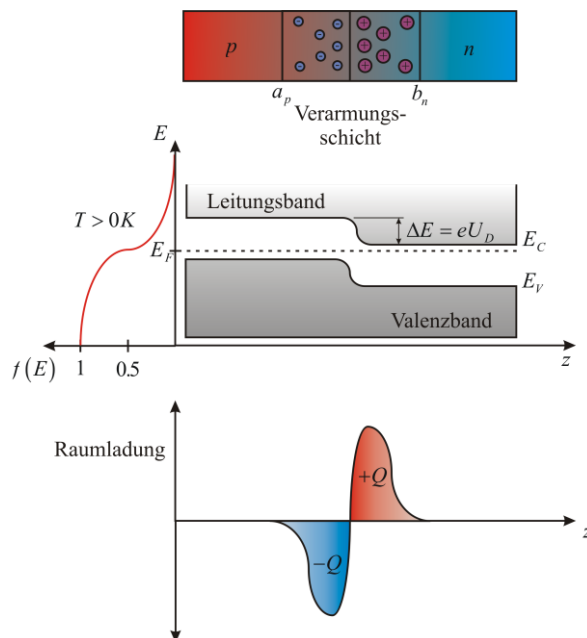


Abb. 3: Schema eines pn-Übergangs mit zugehörigen Energiebändern und der sich ausprägenden Raumladung in der Verarmungszone.

Der Gleichgewichtszustand lässt sich durch die Kontinuitätsbeziehung für Diffusions- und Konvektionsströme in einer DGL zusammenfassen:

$$I_{Kon} = \iint_{S_0} dA \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J} \quad (4.16)$$

$$I_{Diff} = \iint_{S_0} dA \hat{\mathbf{n}} \cdot (D_n \nabla n + D_p \nabla p)$$

Aus

$$\mathbf{J} = e(n\mu_n + p\mu_p)\mathbf{E} \quad (4.17)$$

folgt in eindimensionaler Näherung die Gleichung:

$$-(n\mu_n + p\mu_p)E_z = D_n \frac{\partial}{\partial z} n + D_p \frac{\partial}{\partial z} p \quad (4.18)$$

Dies ist eine lineare DGL für den Verlauf der Elektronen- und Löcherdichte in der Sperrschicht. Die Gleichungen sind mathematisch äquivalent und lassen sich demnach getrennt behandeln. Für den Elektronenanteil gilt:

$$D_n \frac{d}{dx} n = -n\mu_n E_x \quad (4.19)$$

Unter Verwendung der Einsteinbeziehung gilt:

$$\begin{aligned} D_n \frac{d}{dx} n &= -n\mu_n E_x \\ \frac{dn}{n} &= -\frac{\mu_n}{D_n} E_x dx \\ &= -\frac{e}{k_B T} E_x dx \end{aligned}$$

Integration ergibt:

$$\begin{aligned} \int_{a_p}^{b_n} dn \frac{1}{n} &= \ln\left(\frac{n_{b_n}}{n_{a_n}}\right) \\ -\frac{e}{k_B T} \int_{a_p}^{b_n} dx E_x &= \frac{U_D}{U_T} \\ \ln\left(\frac{n_{b_n}}{n_{a_n}}\right) &= \frac{U_D}{U_T} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} n_{b_n} &\approx n_D \\ n_{a_p} &\approx \frac{n_i^2}{n_A} \\ U_D &= U_T \ln\left(\frac{n_D n_A}{n_i^2}\right) \end{aligned}$$

Mit der thermischen Spannung  $U_T = k_B T / e$ . Bei Zimmertemperatur  $T = 300$  K und typischen Dotierungsdichten von  $n_D = 2 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$  und  $n_A = 7 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  und  $n_i = 1.5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$  ergibt sich eine Diffusionsspannung von:

$$\begin{aligned} U_D &= U_T \ln\left(\frac{n_D n_A}{n_i^2}\right) \\ &= 0.026 \text{ V} \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3} \cdot 7 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}}{(1.5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3})^2}\right) \\ &= 0.83 \text{ V} \end{aligned}$$

Das Gleichgewicht zwischen Drift- und Diffusionsstrom wird durch Anlegen einer Spannung an den pn-Übergang aufgehoben. Dabei kann der pn-Übergang einmal in *Sperrichtung* oder in *Durchlassrichtung*

vorgespannt werden. Die äußere Spannung wird genau dann positiv gezählt, wenn sie der Diffusionsspannung entgegengesetzt ist.

**Betrieb in Sperrrichtung:** Betrieb in Sperrrichtung bedeutet, dass eine Spannungsquelle derart an den pn-Übergang angeschlossen wird, dass der p-Bereich am Minuspol und der n-Bereich am Pluspol der Spannungsquelle liegt. Da die Sperrschicht von Ladungsträgern leergeräumt ist, besitzt sie einen relativ großen Widerstand im Vergleich zum restlichen Halbleiter, so dass die Diffusionsspannung  $U_D$  und jede äußere Spannung über diese Zone abfallen. Eine äußere Spannung in Sperrrichtung verstärkt diesen Effekt.

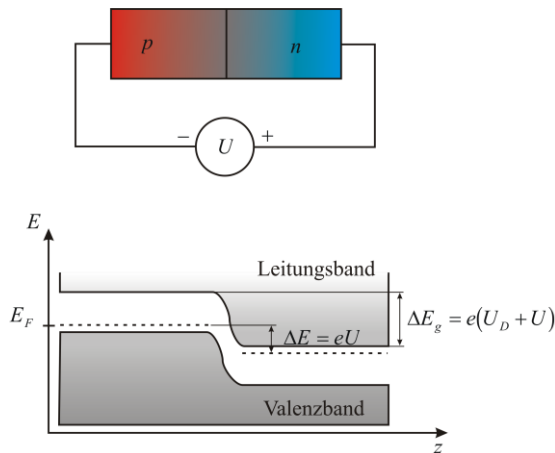


Abb. 4: Schema eines pn-Übergangs beim Betrieb in Sperrrichtung und das zugehörige Bandmodell.

Die äußere Spannung  $U$  hebt die Energieniveaus im p-leitenden Bereich an, so dass die Elektronenenergie im Leitungsband durch das negative Potential erhöht wird. Die Potentialbarriere wächst um den Betrag  $eU$ . Es gelangen dann nur noch wenige Elektronen aus dem Leitungsband des n-Bereichs ins Leitungsband des p-Bereichs. Der pn-Übergang sperrt.

**Betrieb in Durchlassrichtung:** Wird der p-Bereich an den positiven Pol und der n-Bereich an den negativen Pol einer Spannungsquelle angeschlossen, dann wird der pn-Übergang in Durchlassrichtung betrieben. Die thermische Diffusion kann sich besser ausprägen und die Sperrschicht wird mit beweglichen Ladungsträgern überschwemmt. Es kommt zu einer drastischen Vergrößerung der Leitfähigkeit dieser Zone.

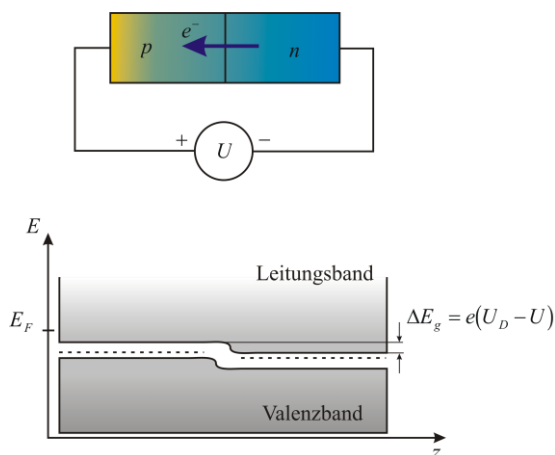


Abb. 5: Schema eines pn-Übergangs bei Betrieb in Durchlassrichtung.

Die Potentialbarriere  $\Delta E$  wird um den Betrag  $eU$  verringert, so dass nun wesentlich mehr Elektronen aus dem Leitungsband des n-dotierten Bereichs ins Leitungsband des p-dotierten Bereichs gelangen. Der Diffusionsstrom nimmt exponentiell zu und der pn-Übergang wird leitend.

Der über einen pn-Übergang fließende Gesamtstrom ist abhängig von der anliegenden Spannungen  $U$  und wird durch die *Shockley-Gleichung* beschrieben.

Shockley-Gleichung:

$$I(U) = I_S \left( e^{\frac{U}{U_T}} - 1 \right). \quad (4.20)$$

Hierbei ist  $I_S$  der *Sättigungsstrom* der Sperrschicht. Er ist von der Dotierungsdichte abhängig und liegt für Si typischerweise im Bereich von nA.

Im Durchlassbereich gilt für  $U > U_T$  die Näherung::

$$I(U) \approx I_S e^{\frac{U}{U_T}}. \quad (4.21)$$

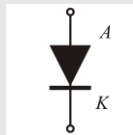
Für den Sperrbereich ist  $U < U_T$  und es gilt:

$$I_R \approx I_S. \quad (4.22)$$

Hierbei ist  $I_R$  der so genannte Sperrstrom, der in der Größenordnung des Sättigungsstroms liegt.

Ein pn-Übergang im Halbleiterkristall verhält sich somit in guter Näherung wie ein elektrisches Ventil, das Elektronen fast ausschließlich in einer Richtung durchlässt. Man nennt eine solche Anordnung ein *Halbleiterdiode* oder kurz *Diode*.

Schaltzeichen: Diode



Die Strom-Spannungs-Charakteristik wird Kennlinie genannt.

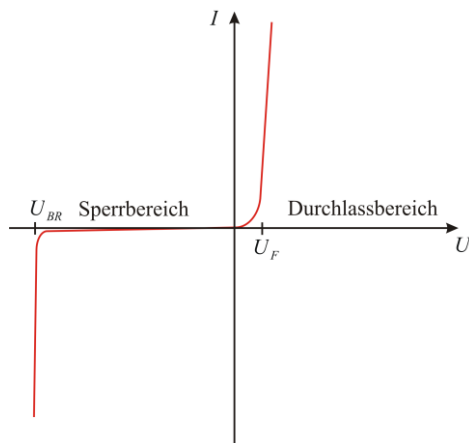


Abb. 6: Exemplarische Kennlinie einer Diode

Die Spannung  $U_{BR}$  heißt *Durchbruchspannung*. Beim Überschreiten der Durchbruchspannung bricht die isolierende Wirkung der Sperrschicht zusammen und der Sperrstrom steigt rapide an. Dieser Vorgang kann zur Zerstörung der Diode führen.

Jede Diode hat einen maximalen Durchlassstrom  $I_{max}$ , der als Grenzwert nicht überschritten werden sollte. Der Spannungsabfall, der bei  $I=0.1 \cdot I_{max}$  über der Diode anliegt, wird als *Flußspannung*  $U_F$  bezeichnet und beträgt bei Si-Dioden ca.  $U_F \sim 0.6$  V.

#### 4.2.1 Schaltungen mit Dioden

Ein wichtiges Anwendungsfeld für Dioden ist das Gleichrichten von Wechselspannungen. Hierzu sind vor allen Dingen Si-Dioden mit großflächigem pn-Übergang geeignet, die einen hohen Durchlassstrom erlauben und für

hohe Sperrspannungen gebaut werden können. In der folgenden Abb. 7 ist ein einfacher *Einweg-Gleichrichter* gezeigt.

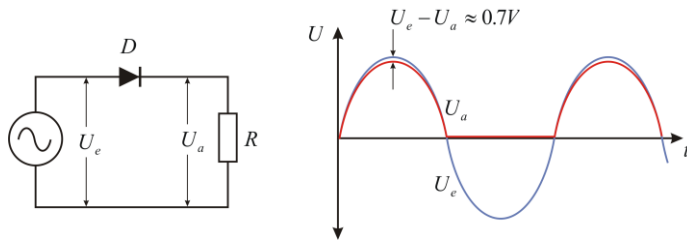


Abb. 7: Einweg-Gleichrichter und Verlauf der Eingangs- und Ausgangsspannung.

Ist die Eingangsspannung  $U_e > 0$ , dann wird die Diode in Durchflussrichtung betrieben. Die Ausgangsspannung ist um den Spannungsabfall  $U_F$  kleiner als die Eingangsspannung  $U_e$ . Für Si-Dioden ist  $U_F \approx 0.7$  V.

Das dynamische Verhalten der Diode ist dadurch gekennzeichnet, dass beim Umschalten von Durchlass- in Sperrichtung nicht instantan gesperrt wird sondern eine endliche *Sperrverzugszeit*  $t_{rr}$  (reverse recovery time) vergeht, bis der pn-Übergang unter Einfluss der Sperrspannung von Ladungsträgern freigeräumt ist. Je nach Größe der Sperrschicht und der Dotierungsdichte liegen die zugehörigen Sperrverzugszeiten im Bereich von 1 ns bis 100  $\mu$ s.

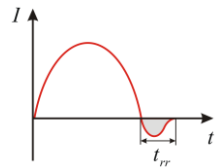


Abb. 8: Zur Sperrverzugszeit.

Die Einweg-Gleichrichterschaltung liefert eine *pulsierende Gleichspannung*. Für viele Anwendungen ist eine *Glättung* erforderlich. Hierzu wird ein *Glättungskondensator* C parallel zur Last geschaltet.

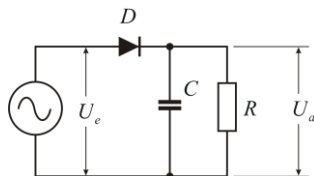


Abb. 9: Glättung einer pulsierenden Gleichspannung.

Der Kondensator C wird durch die positive Halbwelle bis auf den Spitzenwert

$$U_{a0} = U_{e0} - U_F. \quad (4.23)$$

aufgeladen. Sobald die Eingangswechselspannung auf den Wert  $U_{a0}$  gefallen ist, sperrt die Diode. Nun gibt der Kondensator C den Strom  $I_a$  an den Verbraucher ab und die Spannung am Kondensator fällt exponentiell ab, gemäß:

$$U_a(t) = U_{a0} e^{-\frac{t}{R_L C}}. \quad (4.24)$$

Wird der Kondensator derart bemessen, dass er die Bedingung

$$R_L C \gg \tau \quad ; \text{ mit } \tau = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (4.25)$$

erfüllt, dann lässt sich die Exponentialfunktion für  $t < \tau$  entwickeln, mit:

$$U_a(t) \approx U_{a0} \left( 1 - \frac{t}{R_L C} \right). \quad (4.26)$$

Die folgende Abbildung verdeutlicht den Sachverhalt:

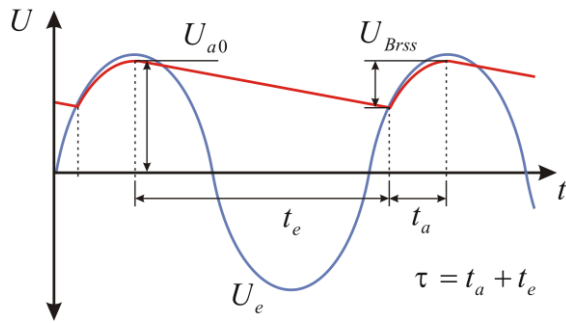


Abb. 10: Spannungsverlauf beim Einweggleichrichter mit Glättung.

Die Spannung am Kondensator fällt während der Entladezeit  $t_e$  von  $U_{a0}$  auf  $U_a(t_e)$  ab. Die Differenz aus diesen beiden Größen definiert die sog. Brummspannung  $U_{BrSS}$ .

**Definition:** Brummspannung.

$$U_{BrSS} = U_{a0} - U_a(t_e). \quad (4.27)$$

Eine einfache Abschätzung ergibt:

$$\begin{aligned} U_{BrSS} &= U_{a0} - U_a(t_e) \\ &\approx U_{a0} - U_{a0} \left( 1 - \frac{t_e}{R_L C} \right) \\ &= U_{a0} \frac{t_e}{R_L C} \\ &\approx U_{a0} \frac{\tau}{R_L C} \end{aligned}$$

Sehr große Kapazitäten minimieren somit die Brummspannung bei einem vorgegebenen Lastwiderstand. Aus  $U_{a0} = R_L I_{a0}$  folgt:

$$U_{BrSS} \approx \frac{I_{a0}}{\nu C}. \quad (4.28)$$

Mit der Frequenz  $\nu$ . Während der Entladezeit  $t_e$  fließt durch die Diode kein Strom. Sie ist dann in Sperrrichtung gepolt. Die größte Sperrspannung liegt genau dann an, wenn die Eingangsspannung ihren negativen Spitzenwert erreicht. Da die Kathode der Diode mit dem Kondensator verbunden ist und somit auf dem Potential  $U_{a0}$  liegt, muss die Gleichrichterdiode für mehr als die doppelte Eingangsspitzenspannung ausgelegt werden.

$$U_{BR} > 2U_{e0}. \quad (4.29)$$

In der Diode selber wird die Verlustleistung

$$P_V = I_D U_F. \quad (4.30)$$

umgesetzt, wobei  $U_F \approx 0.7$  V bei Si-Dioden ist. Die dabei entstehende Verlustwärme wird über das Gehäuse abgeführt. Bei größeren Verlustleistungen ist ein Kühlkörper erforderlich.

Der Diodenstrom  $I_D(t)$  ist nicht identisch mit dem Ausgangsstrom  $I_a(t)$ . Im stationären Betrieb folgen bei der Gleichrichterschaltung Aufladephasen der Dauer  $t_a$  und Entladephasen der Dauer  $t_e$  periodisch aufeinander, wobei  $t_a \ll t_e$  ist. Für die Dauer der Aufladephase fließt während der Zeit  $t_a$  ein Strom  $I_D(t)$ , der sowohl den Kondensator auflädt, als auch zum Verbraucher fließt. Es gilt:

$$I_D(t) = C \frac{dU_a}{dt} + I_a(t) \quad (4.31)$$

Daraus folgt für den mittleren Ausgangsstrom:

$$\begin{aligned} \bar{I}_a &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt I_a(t) \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^{t_a} dt \left( I_D(t) - C \frac{d}{dt} U_a(t) \right) + \frac{1}{\tau} \int_{t_a}^\tau dt C \frac{d}{dt} U_a(t) \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^{t_a} dt I_D(t) \\ &< \frac{t_a}{\tau} I_{Dsp} \end{aligned}$$

Wegen  $\tau = t_e + t_a$  ergibt sich die Abschätzung:

$$I_{Dsp} \approx \bar{I}_a \left( 1 + \frac{t_e}{t_a} \right). \quad (4.32)$$

Der Impulsstrom  $I_{Dsp}$  durch die Diode kann wegen  $t_e \gg t_a$  leicht das 10-fache des mittleren Ausgangsstroms betragen. Bei der Auswahl einer Diode für eine Gleichrichterschaltung ist hierauf stets zu achten.

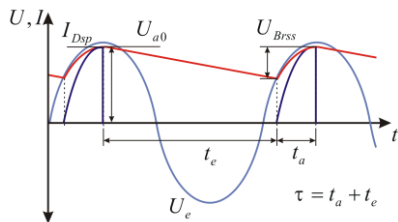


Abb. 11: Stromverlauf durch eine Diode beim Einweggleichrichter.

Will man einer Gleichrichterschaltung größere Ströme entnehmen und die Brummspannung klein halten, ist es sinnvoll *beide Halbwellen* der Eingangsspannung zur Gleichspannungserzeugung auszunutzen. Hierzu dient die so genannte *Brückenschaltung* oder *Graetz-Schaltung*.

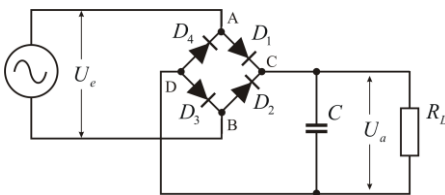


Abb. 12: Brückenschaltung.

Liegt am Punkt A eine positive Halbwelle an und somit am Punkt B eine negative Halbwelle, dann leiten  $D_1$  und  $D_3$ . Im umgekehrten Fall leiten die Dioden  $D_2$  und  $D_4$ . Ohne Glättungskondensator ergibt sich das folgende Bild:

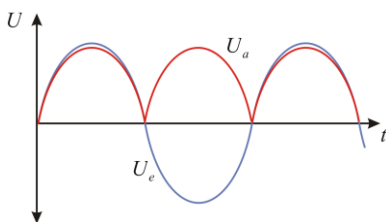


Abb. 13: Spannungsverlauf am Ausgang einer Brückenschaltung ohne Glättung.

Es sind jeweils zwei Dioden in Reihe geschaltet, so dass am Gleichrichter die doppelte Flußspannung abfällt. Für die Ausgangsspannung gilt:



$$U_{a0} = U_{e0} - 2U_F \quad (4.33)$$

Da beide Halbwellen für die Gleichrichtung zur Verfügung stehen, reduziert sich die Brummspannung um etwa die Hälfte:

$$U_{Brss} \approx \frac{I_{a0}}{2\nu C} \quad (4.34)$$

Die Sperrspannung der Dioden muss beim Brückengleichrichter lediglich der maximal auftretenden Spitzenamplitude entsprechen.

$$U_{BR} > U_{e0} \quad (4.35)$$

Brückengleichrichter gibt es komplett in einem Gehäuse integriert. Bei hohen Leistungen ist auch hier ein Kühlkörper oder eine aktive Kühlung notwendig.

Einstufige Kaskade:

Mit Hilfe von Dioden und Kondensatoren lassen sich relativ hohe Gleichspannungen über so genannte *Kaskaden* erzeugen. Die einstufige Kaskade wird *Villard-Schaltung* genannt.

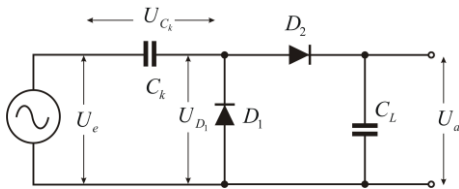


Abb. 14: Einstufige Kaskade.

Wenn die Eingangsspannung negative Werte annimmt, wird die Diode  $D_1$  leitend und der Kondensator  $C_k$  lädt sich auf die Spannung  $U_{Ck}=U_{e0}$  auf. Steigt  $U_a$  wieder an, dann sperrt die Diode  $D_1$ . Die an der Diode abfallende Spannung ist somit gegeben durch:

$$U_D = 2U_{e0} \quad (4.36)$$

Die Spannung an der Diode  $D_1$  entspricht der über der Nulllinie verschobenen Wechselspannung  $U_e$ . Die Diode  $D_2$  lädt den Kondensator  $C_L$  auf den Scheitelwert von  $U_D$  auf. Für die Ausgangsspannung der Villard-Schaltung ergibt sich demnach:

$$U_{a0} = 2U_{e0} \quad (4.37)$$

Bei einer Eingangsspannung von  $U_{eff}=230$  V ( $U_{e0}=325$  V) lässt sich mit einer einstufigen Kaskade eine Ausgangsspannung von  $U_{a0}=650$  V erzielen.

Der Kondensator  $C_L$  bestimmt die auftretende Brummspannung.  $C_k$  und der Innenwiderstand der Spannungsquelle sind für den Spannungsabfall bei Belastung verantwortlich. In der Regel wählt man  $C_k=C_L$ .

Mehrstufige Kaskade:

Schaltet man mehrere einstufige Kaskaden hintereinander, dann erhält man eine mehrstufige Kaskade oder auch *Greinacher-Schaltung*.

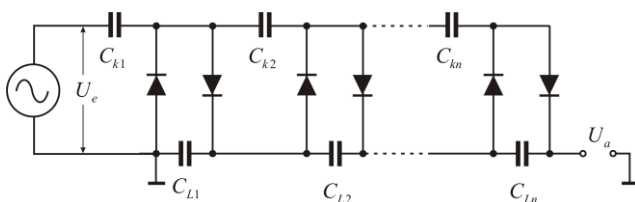


Abb. 15: Mehrstufige Kaskade.

Jede Stufe erzeugt an  $C_L$  eine Gleichspannung  $U_L=2U_{e0}$ . An der Reihenschaltung der Kondensatoren entsteht daher die n-fache Ausgangsspannung.

$$U_{a0} = 2nU_{e0}. \quad (4.38)$$

Die Greinacher-Schaltung findet ihren Einsatz bei der Erzeugung von Hochspannungen in der Forschung aber auch in der allgemeinen Elektrotechnik findet die Schaltung beispielsweise zum Betrieb von Fernsehrohren ihren Einsatz.

#### 4.2.2 Die Zener-Diode

Unter dem *Zener-Effekt* versteht man die Ladungsträgererzeugung im starken elektrischen Feld. Liegt im pn-Übergang einer Diode das Valenzband des p-dotierten Bereichs auf einer Höhe mit dem Leitungsband des n-dotierten Bereichs, so besteht bei genügend hohen Feldstärken die Möglichkeit, dass die Elektronen durch das Feld tunneln. Da die Tunnelwahrscheinlichkeit mit abnehmender Breite der Potentialbarriere ansteigt, ergibt sich ein mit der Diodenspannung stark zunehmender Strom.

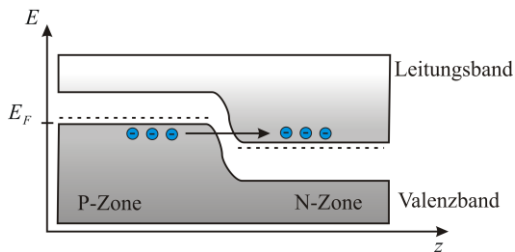
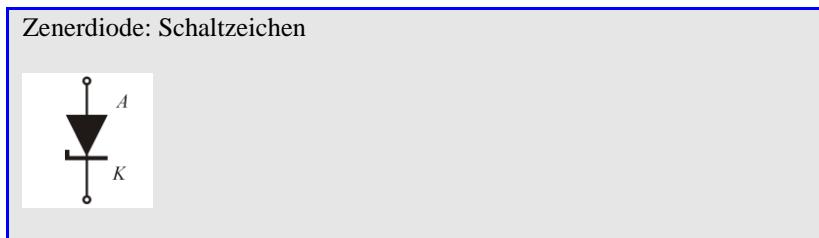


Abb. 16: Bandmodell zum Zener-Effekt.

In Ge und Si ist das für den Zener-Effekt erforderliche Feld etwa  $10^6 \text{V/cm}$ . Dieser Durchbruchmechanismus führt zu keiner Zerstörung der Diode und wird in der Z-Diode oder Zenerdiode zum Stabilisieren von Gleichspannungen ausgenutzt.



Eine typische Kennlinie einer Zenerdiode ist in der folgenden Abbildung gezeigt.

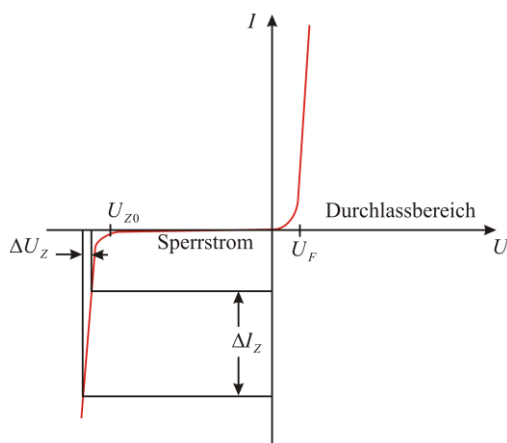


Abb. 17: Kennlinie einer Zenerdiode.

Da Spannung bei der der Sperrstrom exponentiell ansteigt wird *Zener-Spannung*  $U_{Z0}$  genannt. Die Größe

$$\frac{dU_z}{dI_z} := r_z \quad (4.39)$$

Heißt differentieller *Zener-Widerstand* und entspricht dem Kehrwert der Steigung der Durchbruchskennlinie. Es gilt:

$$U_z = U_{z0} + r_z I_z \quad (4.40)$$

Zenerdioden mit kleinem  $r_z$  ( $r_z < 10 \Omega$ ) eignen sich besonders zur Erzeugung von Gleichspannungen.