2.3 INTEGRALGLEICHUNGEN UND IHRE KLASSIFIKATION

Neben Differentialgleichungen gehören Integralgleichungen zu den wichtigsten mathematischen Modellen realer Prozesse aus der Physik, der Technik und der Aerodynamik. Zudem erweisen sich Integralgleichungen als wertvolles Hilfsmittel beim Studium von Differentialgleichungen und Anfangswertproblemen.
Generell wird eine Gleichung, bei der die gesuchte Funktion unter einem Integral erscheint, als Integralgleichung bezeichnet. Eine erste Einschränkung bildet die Klasse der so genannten linearen Integralgleichungen, die eine unbekannte Funktion in linearer Form enthalten. Diese linearen Integralgleichungen werden nochmals nach ihrer äußeren Gestalt klassifiziert:

- Tritt die unbekannte Funktion nur unter dem Integral auf, so nennt man die zugehörige Integralgleichung eine 1. *Art*, sonst eine 2. *Art* oder 3. *Art*, je nachdem, ob die unbekannte Funktion außerhalb des Integrals mit einer Konstanten oder einer Funktion multipliziert wird.

- Sind die Integrationsgrenzen fix, dann liegt eine Integralgleichung vom *Fredholmschen Typ* vor, hängen sie hingegen von der freien Variablen ab, dann handelt es sich um eine Integralgleichung vom *Volterra Typ*.

So ist beispielsweise die Gleichung

$$y(t) - \lambda \int_0^t d\nu\, g(\nu, t)\, y(\nu) = f(t), \tag{2.23}$$

eine Integralgleichung 2. Art vom Volterra Typ. Die Funktion $g(\nu,\ t)$ wird als *Kern* der Integralgleichung bezeichnet. Treten im Kern Singularitäten auf, dann kommt noch die Bezeichnungsweise *singuläre Integralgleichung* hinzu. In Abhängigkeit von der Stärke der Singularität unterscheidet man noch zwischen *schwach singulären* und *stark singulären* Integralgleichungen.
Eine analytische Methode zur Lösung von Volterragleichungen mit Differenzenkern (d. h. ein Integrationskern, der lediglich von der Differenz t-ν abhängig ist) macht sich die Laplace-Transformation zunutze. Hierzu wird zunächst der für die Lösung von derartigen Integralgleichungen wichtige Begriff der Faltung eingeführt:

> Definition: Faltung.
> Seien f und g analytische Funktionen, mit $f,\ g \in C^1(C)$, dann ist die Faltung $f \circ g$ definiert als:
>
> $$f \circ g(t) := \int_0^t d\nu\, f(\nu)\, g(t - \nu). \tag{2.24}$$

Ein interessanter Spezialfall der Volterragleichung 2. Art ist die so genannte *Integralgleichung vom Faltungstyp*. Sie tritt häufig bei Problemstellungen in der Elektrotechnik, Wellenmechanik und Spektroskopie auf.

> Definition: Integralgleichung vom Faltungstyp.
> Eine Integralgleichung vom Faltungstyp besitzt die folgende Form:
>
> $$y(t) - \lambda \int_0^t d\nu\, y(\nu)\, g(t - \nu) = f(t). \tag{2.25}$$

Unter Verwendung der Definition für die Faltung, lässt sich die Faltungsgleichung wie folgt schreiben:

$$y(t) - \lambda \cdot y \circ g(t) = f(t). \tag{2.26}$$

Zur Lösung von Integralgleichungen vom Faltungstyp ist der Faltungssatz von zentraler Bedeutung:

> Satz: Faltungssatz für Laplace-Transformationen.
> Seien f und g Funktionen, für die entsprechende Laplace-Transformationen F und G existieren, dann gilt:
>
> $$\mathcal{L}\; f \circ g\,(s) = F(s)G(s). \tag{2.27}$$

Die Laplace-Transformation der Faltung zweier Funktionen ist somit gegeben durch das Produkt der beiden einzelnen Laplace-Transformationen. Der Satz lässt sich recht einfach beweisen.

Beweis: Gemäß der Definition für die Laplace-Transformation gilt:

$$
\begin{aligned}
F(s)\cdot G(s) &= \int_0^{+\infty} d\nu\, e^{-\nu s} f(\nu) \int_0^{+\infty} d\eta\, e^{-\eta s} g(\eta) \\
&= \int_0^{+\infty} d\nu \int_0^{+\infty} d\eta\, e^{-(\nu+\eta)s} f(\nu) g(\eta) \\
&= \int_0^{+\infty} d\nu \int_\nu^{+\infty} dt\, e^{-st} f(\nu) g(t-\nu) \\
&= \int_0^{+\infty} d\nu f(\nu) \int_\nu^{+\infty} dt\, e^{-st} g(t-\nu) \\
&= \int_0^{+\infty} dt\, e^{-st} \int_0^t d\nu f(\nu) g(t-\nu) \\
&= \int_0^{+\infty} dt\, e^{-st} f \circ g(t) \\
&= \mathrm{L}\; f \circ g\; (s)
\end{aligned}
$$

Hierbei wurde im 3. Schritt mit $\eta = t - \nu$ substituiert und im 5. Schritt wurde der *Satz von Fubini* herangezogen. Folglich gilt der Faltungssatz für Laplace-Transformationen. □

Der Faltungssatz bietet eine einfache Möglichkeit Integralgleichungen vom Faltungstyp zu lösen. Gemäß der der Definition gilt:

$$y(t) - \lambda \int_0^t d\nu\, y(\nu) g(t-\nu) = f(t) \cdot \tag{2.28}$$

Umformen ergibt:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= f(t) + \lambda \int_0^t d\nu\, y(\nu) g(t-\nu) \\
&= f(t) + \lambda \cdot y \circ g(t)
\end{aligned}
$$

Die Gleichung wird nun einer Laplace-Transformation unterzogen, mit:

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= F(s) + \lambda \cdot \mathcal{L}\; y \circ g\; (s) \\
&= F(s) + \lambda \cdot Y(s) G(s)
\end{aligned}
$$

Umformen der Gleichung ergibt:

$$Y(s) = \frac{F(s)}{1 - \lambda G(s)} \cdot \tag{2.29}$$

Die Gleichung stellt eine explizite Lösung für Integralgleichungen vom Faltungstyp dar. Unter Verwendung der komplexen Inversionsformel ergibt sich die gesuchte Funktion $y(t)$:

Satz: Lösungsformel für Integralgleichung vom Faltungstyp.
Seien f und g Funktionen für die entsprechende Laplace-Transformierte F und G existieren, dann gilt:

$$y(t) = \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} \frac{ds}{2\pi i} e^{st} \frac{F(s)}{1 - \lambda G(s)} \cdot \tag{2.30}$$

Bei der mathematischen Formulierung von Problemstellungen in der Naturwissenschaft und Technik, treten häufig Anfangswertprobleme von der Art

$$\ddot{y}(t) = f(t, y(t)) \quad ;\text{mit } y(0) = y_0,\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0 \tag{2.31}$$

auf. Solche Anfangswertprobleme kommen beispielsweise bei der Beschreibung ungedämpfter, elektrischer Schwingungen vor. Es kann nun gezeigt werden, dass sich diese DGL 2. Ordnung mit den vorgegebenen Anfangswerten auf eine Integralgleichung vom Faltungstyp umformen lässt. Es sei:

$$\ddot{y}(t) = f\left(t, y(t)\right) \quad ;\text{mit } y(0) = y_0,\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0$$

Eine einfache Integration der Gleichung ergibt:

$$\dot{y}(t) = \int_0^t d\nu f\left(\nu, y(\nu)\right) + \dot{y}_0 \cdot \tag{2.32}$$

Erneute Integration ergibt:

$$y(t) = \int_0^t ds \int_0^s d\nu f\left(\nu, y(\nu)\right) + \dot{y}_0 t + y_0 \cdot \tag{2.33}$$

Auch hier wird die Anfangsbedingung $y(0)=y_0$ durch den gefundenen Ausdruck erfüllt. Das Integral kann mit Hilfe des *Satzes von Fubini* vereinfacht werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t ds \int_0^s d\nu f\left(\nu, y(\nu)\right) + y_0' t + y_0 \\ &= \int_0^t d\nu \int_\nu^t ds f\left(\nu, y(\nu)\right) + y_0' t + y_0 \\ &= \int_0^t d\nu (t-\nu) f\left(\nu, y(\nu)\right) + y_0' t + y_0 \end{aligned}$$

Die Lösung des einfachen Randwertproblems 2. Ordnung reduziert sich somit auf die Lösung einer Integralgleichung vom Faltungstyp.

Satz: Integralgleichung zum einfachen Anfangswertproblem.
Gegeben sei das allgemeine Anfangswertproblem:

$$\ddot{y}(t) = f\left(t, y(t)\right) \quad ;\text{mit } y(0) = y_0,\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0$$

Die Lösung in Form einer Integralgleichung ist dann gegeben durch:

$$y(t) = \int_0^t d\nu (t-\nu) f\left(\nu, y(\nu)\right) + y_0' t + y_0 \cdot \tag{2.34}$$

Der Sachverhalt lässt sich mit Hilfe einer Beispielaufgabe aus dem Bereich der Elektrotechnik verdeutlichen.

Beispiel: Idealer Schwingkreis mit Anfangsbedingungen. Gegeben sei der folgende Aufbau bestehend aus einer Kapazität C und einer Induktivität L:

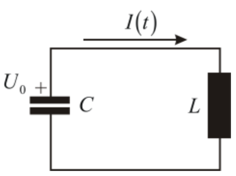

Abb. 5: Idealer Schwingkreis.

Mit Hilfe der Kirchhoffschen Regeln lässt sich das zugehörige Anfangswertproblem formulieren:

$$\ddot{I}(t) + \frac{1}{LC} I(t) = 0 \quad ;\ \text{mit } I(0) = 0,\ \dot{I}(0) = \frac{U_0}{L}$$

Umformen ergibt:

$$\ddot{I}(t) = -\frac{1}{LC} I(t)$$

Gemäß dem Satz zur Integralgleichung für das einfache Anfangswertproblem gilt:

$$I(t) = -\frac{1}{LC}\int_0^t d\nu (t-\nu) I(\nu) + \frac{U_0}{L} t$$

Die Integralgleichung ist vom Faltungstyp und lässt sich durch eine Laplace-Transformation lösen. Es gilt:

$$\mathcal{L}\ I\ (s) = \hat{I}(s)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\ t\ (s) &= \int_0^{+\infty} dt t e^{-st} \\
&= \int_0^{+\infty} dt t \frac{d}{dt}\left\{-\frac{1}{s} e^{-st}\right\} \\
&= \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} dt e^{-st} \\
&= \frac{1}{s^2}
\end{aligned}$$

Gemäß dem Faltungssatz gilt:

$$\hat{I}(s) = -\frac{\omega_0^2}{s^2}\hat{I}(s) + \frac{U_0}{L}\frac{1}{s^2}$$

Mit $\omega_0^2 := \frac{1}{LC}$.

Umformen ergibt die Spektralfunktion:

$$\hat{I}(s) = \frac{U_0}{L}\frac{1}{\omega_0^2 + s^2}.$$

Unter Verwendung der komplexen Inversionsformel lässt sich die Stromstärke im Kreis als Funktion der Zeit finden:

$$I(t) = \frac{U_0}{L}\int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} \frac{ds}{2\pi i}\frac{e^{st}}{\omega_0^2 + s^2}.$$

Der Integrand besitzt Polstellen erster Ordnung in $s = \pm i\omega_0$. Unter Verwendung des Residuensatzes gilt:

$$\oint_C ds \frac{e^{st}}{\omega_0^2 + s^2} = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\left\{\frac{e^{st}}{\omega_0^2 + s^2}\right\}\Bigg|_{s=\pm i\omega_0}$$

$$= 2\pi i\left[\lim_{s\to i\omega_0}(s - i\omega_0)\frac{e^{st}}{(s-i\omega_0)(s+i\omega_0)} + \lim_{s\to -i\omega_0}(s + i\omega_0)\frac{e^{st}}{(s-i\omega_0)(s+i\omega_0)}\right]$$

$$= 2\pi i\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}$$

Ferner gilt:

$$\oint_C ds \frac{e^{st}}{\omega_0^2 + s^2} = \int_{\Gamma_r} ds \frac{e^{st}}{\omega_0^2 + s^2} + \int_{-ir}^{+ir} ds \frac{e^{st}}{\omega_0^2 + s^2}.$$

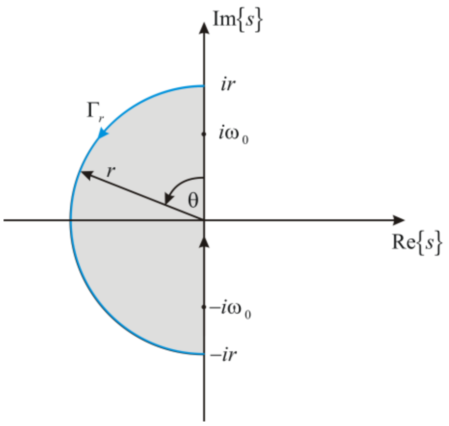

Abb. 6: Zum Integrationsbereich.

Für das Integral über dem Halbkreis gilt:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\Gamma_r} ds \frac{e^{st}}{\omega_0^2+s^2}\right| &\leq \int_{\Gamma_r} |ds| \left|\frac{e^{st}}{\omega_0^2+s^2}\right| \\
&= \int_0^{\pi} \left|d\theta (ir) e^{i\theta}\right| \left|\frac{e^{irte^{i\theta}}}{\omega_0^2+s^2}\right| \\
&\leq \frac{r}{\omega_0^2+r^2} \int_0^{\pi} d\theta \left|e^{irt\cos\theta} \cdot e^{-rt\sin\theta}\right| \\
&\leq \frac{r}{\omega_0^2+r^2} \int_0^{\pi} d\theta e^{-rt\sin\theta} \\
&= \frac{r}{\omega_0^2+r^2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta e^{-rt\frac{2}{\pi}\theta} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta e^{-rt\left(2-\frac{2}{\pi}\theta\right)} \right) \\
&= \frac{2}{t} \frac{1}{\omega_0^2+r^2} \left(1-e^{-rt}\right)
\end{aligned}
$$

Wegen

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{2}{t} \frac{1}{\omega_0^2+r^2} \left(1-e^{-rt}\right) = 0,$$

folgt aus dem Einschlusskriterium das Verschwinden des Integrals über dem Halbkreis Γ_r für den Grenzübergang $r\to+\infty$. Folglich gilt:

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} ds \frac{e^{st}}{\omega_0^2+s^2} = 2\pi i \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}.$$

Einsetzen in die komplexe Inversionsformel für Laplace-Transformationen ergibt:

$$I(t) = \frac{U_0}{\omega_0 L} \sin(\omega_0 t).$$

Wie zu erwarten ist die Lösung der Problemstellung gegeben durch eine sinusförmige, ungedämpfte Schwingung.

Ergebnis: $I(t) = \frac{U_0}{\omega_0 L} \sin(\omega_0 t).$ (2.35)

Die Amplitude des Stroms ist proportional zur Ladespannung U_0 der Kapazität und umgekehrt proportional zum Betrag der Spulenimpedanz $Z_L = i\omega_0 L$.

Die Beispielaufgabe verdeutlicht die Vorgehensweise bei der Lösung von Anfangswertproblemen unter Verwendung von Integralgleichungen. Das hervorstechende mathematische Rüstzeug ist auch hier die Laplace-Transformation.
Eine weitere Klasse von Anfangswertproblemen besitzt die Form:

$$\ddot{y}(t) = f\left(t, y(t), \dot{y}(t)\right) \quad ;\text{mit } y(0) = y_0,\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0 . \tag{2.36}$$

Solche Anfangswertprobleme sind häufig bei der Beschreibung von gedämpften Schwingungen anzutreffen. Das Anfangswertproblem lässt sich auf eine *Integrodifferentialgleichung vom Faltungstyp* reduzieren. Es gilt:

$$\ddot{y}(t) = f\left(t, y(t), \dot{y}(t)\right) \quad ;\text{mit } y(0) = y_0,\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0 .$$

Eine einfache Integration der Gleichung ergibt:

$$\dot{y}(t) = \int_0^t d\nu f\left(\nu, y(\nu), \dot{y}(\nu)\right) + \dot{y}_0 . \tag{2.37}$$

Erneute Integration ergibt:

$$y(t) = \int_0^t ds \int_0^s d\nu f\left(\nu, y(\nu), \dot{y}(\nu)\right) + \dot{y}_0 t + y_0 . \tag{2.38}$$

Auch hier wird die Anfangsbedingung $y(0)=y_0$ durch den gefundenen Ausdruck erfüllt. Das Integral kann mit Hilfe des *Satzes von Fubini* vereinfacht werden.
Es gilt:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t ds \int_0^s d\nu f\left(\nu, y(\nu), \dot{y}(\nu)\right) + y_0' t + y_0 \\ &= \int_0^t d\nu \int_\nu^t ds f\left(\nu, y(\nu), \dot{y}(\nu)\right) + y_0' t + y_0 \\ &= \int_0^t d\nu (t-\nu) f\left(\nu, y(\nu), \dot{y}(\nu)\right) + y_0' t + y_0 \end{aligned}$$

Die Lösung des allgemeinen Randwertproblems 2. Ordnung reduziert sich somit auf die Lösung einer Integralgleichung vom Faltungstyp.

Satz: Integrodifferentialgleichung zum allgemeinen Anfangswertproblem.
Gegeben sei das Anfangswertproblem:

$$\ddot{y}(t) = f\left(t, y(t), \dot{y}(t)\right) \quad ;\text{mit } y(0) = y_0,\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0$$

Die Lösung in Form einer Integralgleichung ist dann gegeben durch:

$$y(t) = \int_0^t d\nu (t-\nu) f\left(\nu, y(\nu), \dot{y}(\nu)\right) + y_0' t + y_0 . \tag{2.39}$$

Im Unterschied zum eingangs behandelten Fall des einfachen Anfangswertproblems kann hier im Integranden der Gleichung auch die erste Ableitung von y vorkommen. Die Lösung der zugehörigen Integrodifferentialgleichung ist dann auch in der Regel schwieriger zu finden als bei einer einfachen Integralgleichung.
Auch hier lässt sich der Sachverhalt am besten mit Hilfe eines Beispiels veranschaulichen. Integrodifferentialgleichungen mit Anfangsbedingungen treten bei gedämpften Schwingungen auf. Eine entsprechende Problemstellung aus der Elektrotechnik ist der Serienresonanzkreis mit ohmschen Verlusten.

Beispiel: Gedämpfter Resonanzkreis.

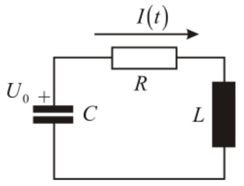

Abb. 7: Gedämpfter Schwingkreis

Mit Hilfe der Kirchhoffschen Regeln lässt sich das zugehörige Anfangswertproblem formulieren:

$$\ddot{I}(t)+\frac{R}{L}\dot{I}(t)+\frac{1}{LC}I(t)=0 \quad ; \text{ mit } I(0)=0,\ \dot{I}(0)=\frac{U_0}{L}$$

Umformen ergibt:

$$\ddot{I}(t)=-\frac{R}{L}\dot{I}(t)-\frac{1}{LC}I(t)$$

Gemäß dem Satz zur Integralgleichung für das allgemeine Anfangswertproblem gilt:

$$\begin{aligned}I(t)&=\int_0^t d\nu(t-\nu)f\left(\nu,I(\nu),\dot{I}(\nu)\right)+\frac{U_0}{L}t\\&=-\frac{R}{L}\int_0^t d\nu(t-\nu)\dot{I}(\nu)-\frac{1}{LC}\int_0^t d\nu(t-\nu)I(\nu)+\frac{U_0}{L}t\end{aligned}$$

Die Integralgleichung ist vom Faltungstyp und lässt sich durch eine Laplace-Transformation lösen. Es gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\ I\ (s)&=\hat{I}(s)\\ \mathcal{L}\ t\ (s)&=\int_0^{+\infty}dtte^{-st}\\&=\int_0^{+\infty}dtt\frac{d}{dt}\left\{-\frac{1}{s}e^{-st}\right\}\\&=\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}dte^{-st}\\&=\frac{1}{s^2}\\ \mathcal{L}\ \dot{I}\ (s)&=s\hat{I}(s)-I(0)\end{aligned}$$

Wegen *I*(0)=0 ergibt eine Laplace-Transformation der Gleichung unter Verwendung des Faltungssatzes:

$$\hat{I}(s)=-\frac{R}{sL}\hat{I}(s)-\frac{\omega_0^2}{s^2}\hat{I}(s)+\frac{U_0}{L}\frac{1}{s^2}$$

Mit $\omega_0^2 := \frac{1}{LC}$.

Umformen ergibt die Spektralfunktion:

$$\hat{I}(s)=\frac{U_0}{L}\frac{1}{s^2+\frac{R}{L}s+\omega_0^2}.$$

Unter Verwendung der komplexen Inversionsformel lässt sich die Stromstärke im Kreis als Funktion der Zeit finden:

$$I(t)=\frac{U_0}{L}\int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty}\frac{ds}{2\pi i}\frac{e^{st}}{s^2+\frac{R}{L}s+\omega_0^2}\cdot$$

Der Integrand besitzt Polstellen erster Ordnung in $s=-R/2L\pm i\omega$. Mit

$$\omega:=\sqrt{\omega_0^2+\left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Unter Verwendung des Residuensatzes gilt:

$$\oint_C ds\frac{e^{st}}{s^2+\frac{R}{L}s+\omega_0^2}=2\pi i\sum res\left\{\frac{e^{st}}{s^2+\frac{R}{L}s+\omega_0^2}\right\}\Bigg|_{s=-\frac{R}{2L}\pm i\omega}$$

$$=2\pi i\left[\lim_{s\to-\frac{R}{2L}+i\omega}\left(s+\tfrac{R}{2L}-i\omega\right)\frac{e^{st}}{\left(s+\frac{R}{2L}+i\omega\right)\left(s+\frac{R}{2L}-i\omega\right)}+\lim_{s\to-\frac{R}{2L}-i\omega}\left(s+\tfrac{R}{2L}+i\omega\right)\frac{e^{st}}{\left(s+\frac{R}{2L}+i\omega\right)\left(s+\frac{R}{2L}-i\omega\right)}\right]$$

$$=2\pi i e^{-\frac{R}{2L}t}\frac{\sin(\omega t)}{\omega}$$

Ferner gilt:

$$\oint_C ds\frac{e^{st}}{s^2+\frac{R}{L}s+\omega_0^2}=\int_{\Gamma_r}ds\frac{e^{st}}{s^2+\frac{R}{L}s+\omega_0^2}+\int_{-ir}^{+ir}ds\frac{e^{st}}{s^2+\frac{R}{L}s+\omega_0^2}\cdot$$

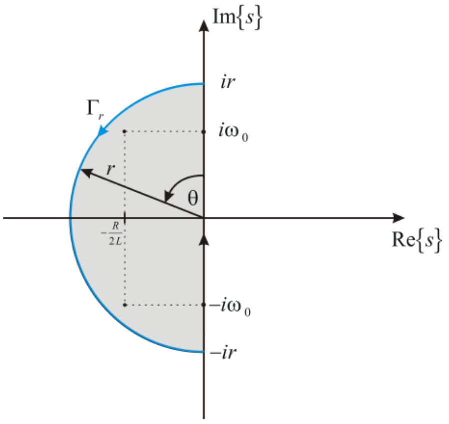

Abb. 8: Zum Integrationsbereich.

Für das Integral über dem Halbkreis Γ_r gilt:

$$\left|\int_{\Gamma_r}ds\frac{e^{st}}{s^2+\frac{R}{L}s+\omega_0^2}\right|\le\int_{\Gamma_r}|ds|\left|\frac{e^{st}}{s^2+\frac{R}{L}s+\omega_0^2}\right|$$

$$=\int_0^{\pi}\left|d\theta(ir)e^{i\theta}\right|\left|\frac{e^{irte^{i\theta}}}{\omega_0^2+\frac{R}{L}re^{i\theta}+r^2}\right|$$

$$\le\frac{r}{\omega_0^2+r^2}\int_0^{\pi}d\theta\left|e^{irt\cos\theta}\cdot e^{-rt\sin\theta}\right|$$

$$\le\frac{2}{t}\frac{1}{\omega_0^2+r^2}\left(1-e^{-rt}\right)$$

Wegen

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{2}{t}\frac{1}{\omega_0^2+r^2}\left(1-e^{-rt}\right)=0,$$

folgt aus dem *Einschlusskriterium* das Verschwinden des Integrals über dem Halbkreis Γ_r für den Grenzübergang $r \rightarrow +\infty$. Folglich gilt:

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} ds \frac{e^{st}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \omega_0^2} = 2\pi i e^{-\frac{R}{2L}t} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \cdot$$

Einsetzen in die komplexe Inversionsformel für Laplace-Transformationen ergibt:

$$I(t) = \frac{U_0}{\omega L} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega t) \cdot$$

Wie zu erwarten ist die Lösung der Problemstellung gegeben durch eine sinusförmige, gedämpfte Schwingung.

Ergebnis: $I(t) = \frac{U_0}{\omega L} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega t) \cdot$ (2.40)

Die Amplitude des Stroms ist proportional zur Ladespannung U_0 der Kapazität und umgekehrt proportional zum Betrag der Spulenimpedanz $Z_L = i\omega L$.