Musterlösung - Blatt 1

Aufgabe 1a)

$$W = (\gamma - 1)m_0c^2$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$
$$\beta = 0,7$$

Für e^- gilt:

$$m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31}kg$$
$$m_0c^2 = 8,199 \cdot 10^{-14}J = 511,8\,keV$$
$$W = 3,28 \cdot 10^{-14}J = 204,86\,keV$$

Für p gilt:

$$m_0 = 1,6726 \cdot 10^{-27}kg$$
$$m_0c^2 = 150 \cdot 10^{-12}J = 938,3\,MeV$$
$$W = 6 \cdot 10^{-11}J = 375,54\,MeV$$

Für U^{1+} gilt:

$$m_0 = 238 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}kg = 3,95 \cdot 10^{-25}kg$$
$$m_0c^2 = 3,56 \cdot 10^{-8}J = 222\,GeV$$
$$W = 3,5 \cdot 10^{-8}J = 88,84\,GeV$$

Aufgabe 1b)

$$W = q \cdot U = q \cdot d \cdot E$$
$$d = \frac{W}{qE}$$

Für e^- gilt:

$$d = \frac{204,86kV}{10MV/m} = 0,02m$$

Für p gilt:

$$d = 37,55m$$

Für U^{1+} gilt:

$$d = 8,844km$$

Aufgabe 1c)

$$F_L = q \cdot v \cdot B = \frac{mv^2}{r}$$
$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{m_0 \beta c}{qB}$$

Für e^- gilt:

$$r = \frac{m_0 \beta c}{qB} = \frac{9,11 \cdot 10^{-31} kg \cdot 0,7 \cdot 3 \cdot 10^8 m/s}{1,6 \cdot 10^{-19} C \cdot 1T} = 0,12\, cm$$

Für p gilt:

$$r = 2,2\, m$$

Für U^{1+} gilt:

$$r = 521,67\, m$$

Aufgabe 2a)

Kugelsymmetrie:

$$\vec{r} = \vec{x'} + \vec{y'} + \vec{z'}$$
$$r = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

Gaußscher Satz:

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Innerhalb des Bunches:

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0}$$
$$E(r) = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0}$$

Außerhalb des Bunches:

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0}$$
$$E(r) = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Aufgabe 2b)

Innerhalb des Bunches nur E_r-Komponente:

$$E(x') = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \cdot \frac{x'}{r} = \frac{\rho_0 x'}{3\epsilon_0}$$
$$E(y') = \frac{\rho_0 y'}{3\epsilon_0}$$
$$E(z') = \frac{\rho_0 z'}{3\epsilon_0}$$

Es folgt:

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = qE_{x'} = q\frac{\rho_0 x'}{3\epsilon_0}$$
$$m\frac{d^2y'}{dt^2} = qE_{y'} = q\frac{\rho_0 y'}{3\epsilon_0}$$
$$m\frac{d^2z'}{dt^2} = qE_{z'} = q\frac{\rho_0 z'}{3\epsilon_0}$$

Aufgabe 2c)

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2}\int_0^R E_r^2 \cdot 4\pi r^2 dr + \frac{\epsilon_0}{2}\int_R^\infty E_r^2 \cdot 4\pi r^2 dr =$$
$$\frac{\epsilon_0}{2}\int_0^R \frac{\rho_0^2 r^2}{9\epsilon_0^2} \cdot 4\pi r^2 dr + \frac{\epsilon_0}{2}\int_R^\infty \frac{\rho_0^2 R^6}{9\epsilon_0^2} \cdot \frac{1}{r^4} \cdot 4\pi r^2 dr =$$
$$\frac{1}{2}\frac{4\pi\rho_0^2}{9\epsilon_0}\left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^R + \frac{1}{2}\frac{4\pi\rho_0^2 R^6}{9\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^\infty = \frac{1}{2}\frac{4\pi\rho_0^2}{9\epsilon_0}\left[\frac{1}{5}R^5 + R^5\right]$$

Mit

$$Q = Ne$$
$$\rho_0 = ne = \frac{N}{V}$$

folgt schließlich:

$$\frac{1}{2}\frac{(4\pi)^2\rho_0^2(R^3)^2}{4\pi\epsilon_0 R\, 9}\left[\frac{1}{5}+1\right] =$$
$$\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{R} \cdot \frac{6}{5} = 2,76 \cdot 10^{-6} J$$

$$Q_{proBunch} = N \cdot e = 1,602 \cdot 10^{-9} C$$
$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{Q_{proBunch}}{T} = Q_{proBunch} \cdot f = 1,602 \cdot 10^{-9} \cdot 150 \cdot 10^6 = 240 mA$$