Magnetostatischer Quadrupol

Lorentz: $F_x = -ev_s B_z =$

Zentrifugal: $F_f = \frac{mv_s^2}{R}$

$\Rightarrow -ev_s B_z = \frac{mv_s^2}{R}, \; B_z = -\frac{mv_s^2}{ev_s R}$

mit $p = mv$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{R(x,y,s)} = \frac{e}{p} B_z(x,z,s)$$

$R =$ Ablenkradius

$x, y \ll r$

Mit der Taylorreihen wird eine Funktion in der Umgebung bestimmter Punkte durch Potenzreihen dargestellt

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

$$\frac{e}{p} B_z(x) = \frac{e}{p} B_{z0} + \overbrace{\frac{e}{p}\frac{dB_z}{dx}}^{k} x + \frac{e}{2!p}\frac{d^2B_z}{dz^2} x^2$$

$$= \frac{1}{R} + kx + \frac{1}{2!} m x^2$$

Dipol Quadrupol Sextupol

Strahlablenkung — Dipol

Quadrupol $\rightarrow$ Strahlfokussierung

$\rightarrow$ lineare Strahloptik, da nur Ablenkkräfte wirken, die entweder konstant sind (Dipolfeld, repräsentiert durch den Ablenkradius R) oder linear mit dem transversalen Abstand von der Idealbahn zunehmen (Quadrupolfeld, repräsentiert durch die Quadrupolfeldstärke k) Höhere Multipole sind entweder unerwünschte Feldfehler oder sie werden zur Kompensation

Beispiel: Synchrotron!!

oder Feldkorrekturen eingesetzt

Für die Strahlführung geht es konkret um die Frage, wie die Magnete gestaltet sein müssen, um eine bestimmte Feldkonfiguration zu erzeugen

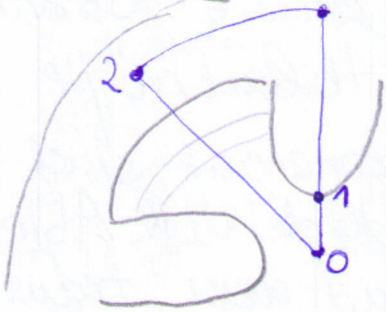
Weil $\nabla \times H = j$, $j = 0$ im Bereich des Strahls $\hookrightarrow \vec{H} = \nabla \psi$ ist durch die Festlegung des Potentials auch das Feld eindeutig bestimmt.

Um einen bestimmten Potentialverlauf $\psi(x,z)$ zu erzeugen, ist es erforderlich die Form der Äquipotentiallinien $\psi(x,z) = \text{const.}$ festzulegen. Die Oberfläche eines hochpermeablen Materials, wie z.B. Eisen bildet eine Äquipotentialfläche. Daher kann man durch geeignete Formen der Magnetpole das Potential $\psi(x,z)$ festlegen und damit auch das Magnetfeld $\vec{H}$.

Übungsaufgaben Blatt Nr. 2.

1a) $U_m = \oint \vec{H}\, d\vec{s} = NI$

Integrationsweg



$$NI = \int_0^1 H_0(r)\,dr + \underbrace{\int_1^2 H_{Fe}(r)\,dr}_{\mu_r \gg 1,\ H_{Fe} = \frac{H_0}{\mu_r}} + \underbrace{\int_2^0 H(r)\,dr}_{\vec{H} \perp \vec{s}}$$

$$NI = \int_0^1 H_0\, dr \qquad r < R \quad B' = \frac{B_0}{R}$$

$B_0 = B_{max}$ für $r = R$

$$H_0(r) = \frac{1}{\mu_0} B' r = \frac{1}{\mu_0} \frac{B_0}{R} \cdot r$$

$B_0 \cdot r$ = maximale Feldaurdung

$$NI = \int_0^1 \frac{B'}{\mu_0} r\, dr = \underline{\underline{\frac{B'}{2\mu_0} R^2}} = \frac{B'}{2\mu_0} \int_0^R r\, dr$$

b) $$NI = \frac{B'}{2\mu_0} R^2 = \frac{15\,T/m\ (0{,}015\,m)^2}{2\ 4\pi\ 10^{-7}\ \frac{Vs}{Am}} = \underline{\underline{1342{,}87\,A}}$$

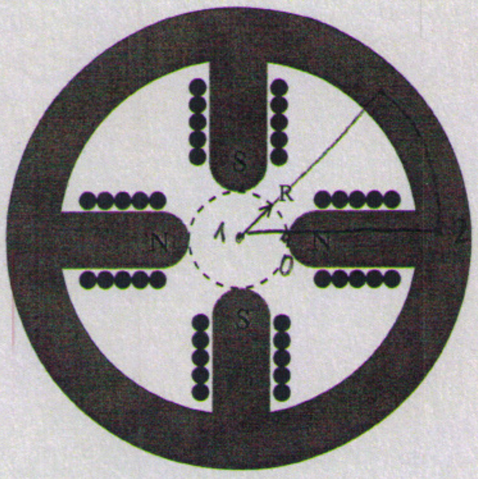
$$P = U \cdot I = R I^2$$

$$R = \rho \frac{l}{A} = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\,\Omega m \cdot \frac{6\,m}{2 \cdot 10^{-5}\,m^2} = 0{,}0051\,\Omega$$

$$\underline{\underline{5{,}1 \cdot 10^{-3}\,\Omega}}$$

$$P = 5{,}1 \cdot 10^{-3}\,\Omega \left(\frac{1342{,}87\,A}{4}\right)^2 = \underline{\underline{574{,}8\,W}}$$

$N = 4$



a) Finden Sie einen geeigneten Integrationsweg für $\oint \mathbf{H}ds$ zwischen den Polschuhen des Quadrupolmagneten und geben Sie so einen Ausdruck für die Größe Amperewindungszahl NI an. Es soll davon ausgegangen werden, dass das Magnetfeld im Zentrum des Quadrupols ($r < R$) einen konstanten Feldgradienten $B' = B_0/R$ besitzt, wobei B_0 der maximale Feldbetrag an der Polspitze $r = R$ auftritt.

b) Berechnen Sie die Amperewindungszahl sowie den Leistungsbedarf des Magneten für folgende Konfiguration:

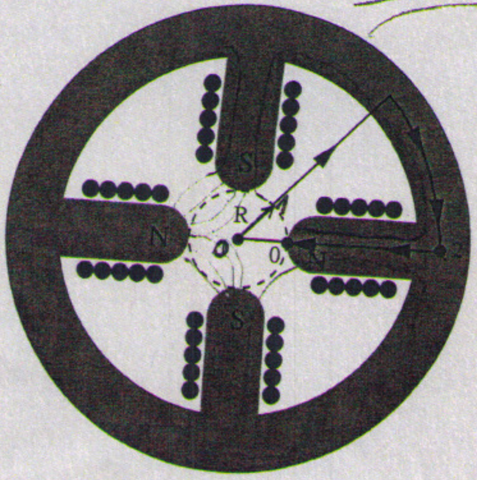
- R=1.5 cm (Apertur des Magneten)
- N=4 (Windungszahl der Spulenwicklung)
- A=0.2 cm^2 (Querschnittsfläche des Spulendrahtes)
- l=600 cm (Gesamtlänge des Spulendrahtes)
- B'=1500 G/cm (magnetischer Feldgradient) $\hat{=}$ 0.15 T/cm = 15 T/m

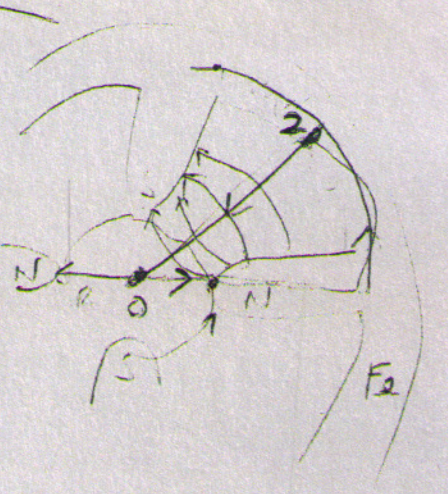
Magnetostatischer Quadrupol (Lösung)

a) Ein passender Integrationsweg ist in der Abbildung gezeigt. Dann ist:

$$NI = \int_0^1 H(r)dr + \int_1^2 H_{Fe}(r)dr + \int_2^0 H(r)dr$$

falsche Zeichnung





Gemäß Aufgabenstellung ist

$$H(r) = \frac{1}{\mu_0} B' r = \frac{1}{\mu_0} \frac{B_0}{R} r. \longrightarrow ?$$

Daraus folgt

$$\int_0^1 H(r) dr = \frac{B'}{\mu_0} \int_0^R r dr = \frac{B'}{2\mu_0} R^2. \quad = NI$$

um damit H viel kleiner als im Spalt

Das Integral von 1 nach 2 ist vernachlässigbar, weil $\mu_{Fe} \gg 1$ ist. Das Integral von 2 nach 0 ist null, weil das Magnetfeld immer senkrecht zum Weg ist. Also gilt für die Amperewindungszahl

$$NI = \frac{B'}{2\mu_0} R^2.$$

b) Mit den in der Aufgabenstellung gegebenen Werten ergibt sich für die Amperewindungszahl:

$$NI = \frac{15\ [T/m]\ 0.015^2\ [m^2]}{\cancel{8}\pi \cdot 10^{-7}\ [VS/Am]} = 1343\ A$$

Für den Widerstand gilt:

$$R = \rho \frac{l}{A} = 1.7 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cancel{m} \frac{6\ \cancel{m}}{2 \cdot 10^{-5}\ \cancel{mm^2}\ m^2} = 5.1 \cdot 10^{-3}\ \Omega$$