Für das Potenzial zwischen beiden Leitern gilt:

$$U = \varphi_{12} = \int_S \mathbf{E} d\mathbf{s} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \int\limits_{r_0}^{a-r_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a-r}\right) dr$$

$$U = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \left[\ln r - \ln(a-r)\right]_{r_0}^{a-r_0} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \left[\ln(a-r_0) - \ln r_0 - \ln r_0 + \ln(a-r_0)\right]$$

$$U = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \left[2\ln(a-r_0) - 2\ln r_0\right] = \frac{Q}{\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{a-r_0}{r_0}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{a-r_0}{r_0}}$$

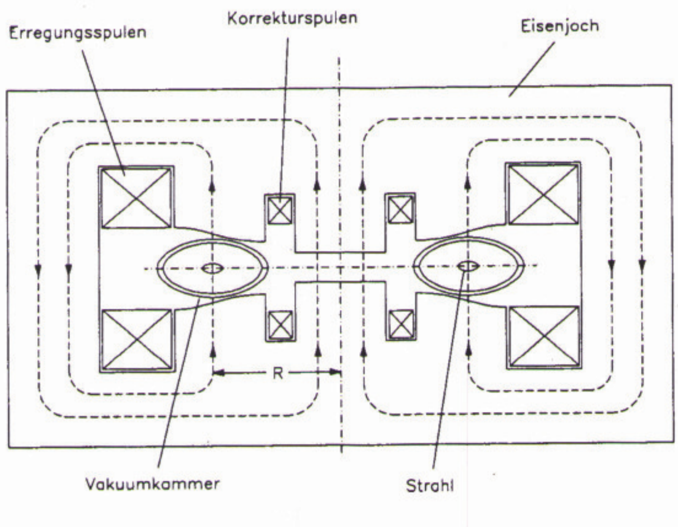
Für $a \gg r_0$ gilt näherungsweise:

$$C \approx \frac{\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{a}{r_0}}$$

Mit $L = 500\ m$, $a = 60\ cm$ und $r_0 = 0.8\ mm$ ergibt sich:

$$C \approx 2.1\ nF$$

3. Für die induzierte Spannung U gilt:



$$U = \oint E ds = -\int\int_A \frac{dB}{dt} dA$$

$U = -\dot{\phi}$

$$U = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

Die elektrische Feldstärke lautet dann:

$$|E| = \frac{|U|}{2\pi R} = \frac{R}{2}\frac{dB}{dt}$$

Unter der Annahme, dass entweder das Magnetfeld homogen ist oder das mittlere Magnetfeld gegeben sei, ergibt sich mit $B = 1\ T$, $R = 1\ m$ und $t = 10\ ms$:

$$E = \frac{1\ m \cdot 100\ T/s}{2} = 50\ V/m$$

$$U = \frac{\pi (1\ m)^2 \cdot 100\ T/s}{\cancel{2}} = 314\ V$$

Die Dauer der Beschleunigung ergibt sich durch die Anstiegszeit T des Magnetfeldes. Für eine Umlaufperiode gilt:

~~ge~~ $v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v}$ $$T = \frac{2\pi R}{c}$$ Annahme $v \approx c$

$U = A \cdot \frac{dB}{dt}$

Die Anzahl der Umläufe lautet dann:

$$n = \frac{t}{T} = \frac{tc}{2\pi R}$$

$\rightarrow \underbrace{\frac{tc}{2\pi \cancel{R}}}_{n} \cdot \pi R^2 \frac{dB}{dt}$

Die Gesamtspannung ist dann:

$$U_{ges} = nU = U\frac{t}{T} = \frac{tcR}{2} \cdot \frac{dB}{dt}$$

Wird das Magnetfeld linear hochgefahren gilt: von 0 bis B $\rightarrow t \cdot \frac{dB}{dt} = B$

$$U_{ges} = \frac{cRB}{2}$$

$\frac{3 \cdot 10^8 \cdot 1 \cdot 1}{2} = 1.5 \cdot 10^8\ V = 150\ MeV$

Dabei ist B das Endmagnetfeld mit $\Delta B = B$. Es ergibt sich eine Maximalenergie $W = eU$ von

$$W \approx 150\ MeV.$$

Das Betatron ist nur für leichte Teilchen wie Elektronen geeignet, die sehr schnell Lichtgeschwindigkeit erreichen. Protonen oder Ionen können während der Anstiegszeit aufgrund der nichtrelativistischen Geschwindigkeit nur einen kleinen Bruchteil der für Elektronen möglichen Spannung nutzen.

Beim Betatron ist der radiale Verlauf der Magnetfeldes nicht konstant. Das bisherige Magnetfeld B nennen wir nun B_a. Aufgrund der Spulengeometrie nimmt es vom

→ für Ionen / Protonen zu wenig Umläufe → zu wenig Spannung

aber: Limitation auf einige 100 MeV, weil e^- Synchrotronstrahlung abstrahlen → $\frac{\Delta E}{\text{Umlauf}} \propto \frac{1}{R} E^4$ → LEP ~~RSP~~ → ILC

Zentrum nach außen ab. Für die induzierte Spannung U und die Beschleunigungsfeldstärke E ist aber der Mittelwert dieses Feldes wichtig:

$$|E| = \frac{R}{2}\left\langle\left|\frac{dB_a}{dt}\right|\right\rangle$$

Die Kraft auf die Elektronen lautet:

$$|F| = \frac{dp}{dt} = e\frac{R}{2}\left\langle\left|\frac{dB_a}{dt}\right|\right\rangle$$

Auf der Kreisbahn muss Kräftegleichgewicht herrschen (B_g ist das Magnetfeld am Ort der Elektronen):

$F_R = F_L$

$$\frac{\gamma m v^2}{R} = evB_g \qquad \frac{p \cdot v}{R} = eB_g \rightarrow \frac{1}{R} = \frac{eB_g}{p}$$

Mit $p = E/c = \gamma mc$ und $v = c$ folgt

$$\frac{1}{R} = \frac{eB_g}{\gamma mc} = \frac{eB_g}{p} \qquad p = eB_g \cdot R \mid \frac{d}{dt}$$

Differenziert man dies nach der Zeit, ergibt sich für dp/dt:

$$\frac{dp}{dt} = eR\frac{dB_g}{dt} \qquad \rightarrow eR\frac{dB_g}{dt} = e\frac{R}{2}\left\langle\left|\frac{dB_a}{dt}\right|\right\rangle$$

Der Verleich ergibt:

$$e\frac{R}{2}\left\langle\left|\frac{dB_a}{dt}\right|\right\rangle = eR\frac{dB_g}{dt}$$

$$\frac{1}{2}\left\langle\left|\frac{dB_a}{dt}\right|\right\rangle = \frac{dB_g}{dt}$$

Die Integration ergibt:

$$|B_g(t)| = \frac{1}{2}|< B_a(t) >| + |B_0|$$

Dies ist die berühmte Wideröesche Betatronbedingung für eine stabile Teilchenbewegung. Das magnetische Führunhgsfeld B_g muss also halb so groß sein, wie das mittlere Induktionsfeld B_a. Das konstante Feld B_0 kann zu B_g addiert werden und dient der Justierung des Strahls.

Das Betatron kann nur bis zu Energien von einigen hundert MeV betrieben werden. Elektronen strahlen auf Kreisbahnen Synchrotronstrahlung ab. Dabei gilt für den Energieverlust pro Umlauf:

$$\Delta W \propto \frac{E^4}{R}$$