a)

Die gesamte Leitung besteht aus einer Aneinanderreihung solcher Leitungselemente. Zu jedem Zeitpunkt t gelten folgende Beziehungen für jedes Leitungselement:

1) Maschenregel $\sum U = 0$

2) Knotenregel $\sum I = 0$

1)
$$U = \underbrace{\Delta z R'(I + \Delta I)}_{\text{Ohmsche Verluste}} + \underbrace{\Delta z L' \frac{\partial}{\partial t}(I + \Delta I)}_{\text{Induktion bzw. Induktivität}} + (U + \Delta U)$$

$U = R \cdot I$; $R' = \frac{R}{\Delta z}$

$U_{ind} = -\dot{\Phi} = -L\dot{I} = -L\frac{\partial I}{\partial t}$

mit $dU = \frac{\partial U}{\partial z} dz$ und $\Delta z \to 0$, $\Delta I \to 0$

$$-\Delta U = (I + \Delta I) R' \Delta z + \Delta z L' \frac{\partial}{\partial t}(I + \Delta I) \quad | :\Delta z$$

$$\boxed{-\frac{\partial U}{\partial z} = IR' + L' \frac{\partial I}{\partial t}} \quad (1)$$

NR:

$U = R \cdot I \to \frac{U}{R} = I$

$G = \frac{1}{R}$

$C = \frac{Q}{U}$, $I = \frac{Q}{t}$ $\Big\}$ $C \cdot U = q$, $C\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial t}$

2)
$$I = \underbrace{G' \Delta z U}_{\text{Verluste am Isolator}} + \underbrace{C' \Delta z \frac{\partial U}{\partial t}}_{\text{Verschiebungsstrom}} + (I + \Delta I)$$

Verschiebungsstrom, überall dort, wo die Spannung entlang der Leitung örtlich ändert

G = Ableitungsbelag

mit $dI = \frac{\partial I}{\partial z} dz$, $\Delta z \to 0$, $\Delta I \to 0$

$$\boxed{-\frac{\partial I}{\partial z} = G'U + C'\frac{\partial U}{\partial t}}$$ (2)

Gleichungen (1) und (2) sind gekoppelt.
Differenzieren nach z führt zu

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial I}{\partial z} R' + L'\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right)$$

$$-\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = \frac{\partial U}{\partial z} G' + C'\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)$$

Strom und Spannung sind stetig differenzierbar und es gilt der Satz von Schwarz: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right)$

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial I}{\partial z} \cdot R' + L'\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I}{\partial z}\right) \quad (3)$$

$$-\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = \frac{\partial U}{\partial z} G' + C'\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) \quad (4)$$

Einsetzen von (2) in (3) führt zu

$$+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = R'\left(G'U + C'\frac{\partial U}{\partial t}\right) + L'\frac{\partial}{\partial t}\left(G'U + C'\frac{\partial U}{\partial t}\right)$$

$$= R'G'U + R'C'\frac{\partial U}{\partial t} + L'G'\frac{\partial U}{\partial t} + L'C'\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = L'C'\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + (R'C' + G'L')\frac{\partial U}{\partial t} + R'G'U}$$

Einsetzen von ① in ④ führt zu

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = G'\left(IR' + L'\frac{\partial I}{\partial t}\right) + C'\frac{\partial}{\partial t}\left(IR' + L'\frac{\partial I}{\partial t}\right)$$

$$= G'IR' + G'L'\frac{\partial I}{\partial t} + C'R'\frac{\partial I}{\partial t} + C'L'\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = L'C'\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + (C'R' + G'L')\frac{\partial I}{\partial t} + G'R'I}$$

b) Lösung : $I(z,t) = I_0 e^{i\omega t - \gamma z}$; $\gamma = \sqrt{(R'+i\omega L')(G'+i\omega C')}$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = i^2 L'C'\omega^2 I + (C'R' + G'L')I i\omega + G'R'I$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = i^2 L'C'\omega^2 I + C'R'Ii\omega + G'L'Ii\omega + G'R'I$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = \underbrace{(R' + i\omega L')(G' + i\omega C')}_{\gamma^2} I \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = \gamma^2 I}$$

ebenso $\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \gamma^2 U}$

Dies ist eine lineare, homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Der allgemeine Lösungsansatz lautet dann :

ganz allgemeiner Ansatz, müssen aber zwei Fälle betrachten

$$U = \underbrace{U_f}_{\text{Amplitude des vorlaufenden Wellenterms}} e^{-\gamma z} + \underbrace{U_r}_{\text{Amplitude des rücklaufenden Wellenterms}} e^{\gamma z}$$

bzw. $I = I_r e^{-\gamma z} + I_r e^{\gamma z}$

Einsetzen in ① bzw ② ergibt

$$-\frac{\partial U}{\partial z} = -\gamma U = \cancel{IR' + LI\omega L} = -\gamma(U_f e^{-\gamma z} + U_r e^{\gamma z})$$

bzw

$$-\frac{\partial I}{\partial z} = -\gamma I = -\gamma(I_r e^{-\gamma z} + I_r e^{\gamma z})$$

$$\boxed{Z = \frac{I}{U}}$$

Die Konstanten sind nicht unabhängig voneinander.

mit dem Ansatz : $I = I_0 e^{i\omega t - \gamma z}$

eingesetzt in ① und ② folgt

$$-\frac{\partial I}{\partial z} = G'U + C'i\omega U = (G' + C'i\omega)U = \gamma(I_r e^{-\gamma z} + I_r e^{\gamma z})$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = IR' + Li\omega I = \underline{(R' + L'i\omega)I = \gamma(U_r e^{-\gamma z} + U_r e^{\gamma z})}$$

$$Z = \gamma(I \Rightarrow I = \frac{U}{Z} = \frac{\gamma(U_f e^{-\gamma z} + U_r e^{\gamma z})}{I(R' + L'i\omega)}$$

$$I = \frac{\sqrt{(i\omega L' + R')(i\omega C' + G')}\,(U_f e^{-\gamma z} + U_r e^{\gamma z})}{I(R' + L'i\omega)} = \frac{U e^{-\gamma z} + U_r e^{\gamma z}}{\sqrt{\frac{R' + i\omega L'}{G' + i\omega C}}}$$ ④

Mit $Z_L = \sqrt{\frac{R' + i\omega L'}{G' + i\omega C'}}$ erhalten wir

$$I(z) = \frac{U_f}{Z_L} e^{-\gamma z} - \frac{U_r}{Z_L} e^{\gamma z}$$

Für eine verlustlose Leitung gilt:

$$Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

Für Koaxialkabel gilt:

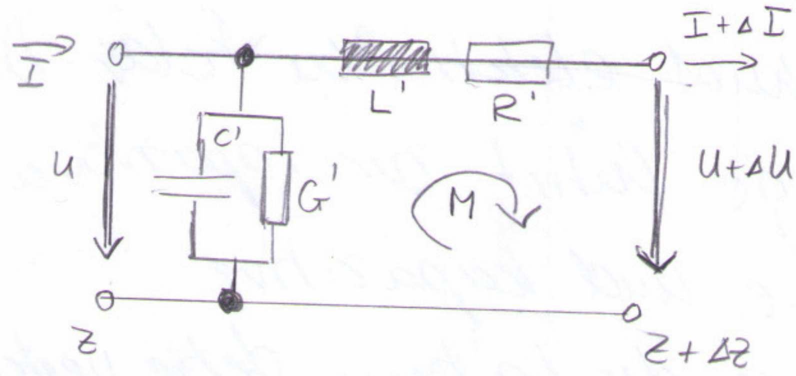
$$L = \frac{\mu_0 \mu_r l}{2\pi} \ln \frac{D}{d}$$

$$C = \frac{2\pi \varepsilon l}{\ln \frac{D}{d}} \Rightarrow \frac{L}{C} = \frac{\mu_0 \mu_r l}{4\pi^2 \varepsilon_r l} \ln \frac{D}{d} \cdot \ln D/d$$

$$Z = \frac{\mu_0 \left(\ln\left(\frac{D}{d}\right)^2\right)}{4\pi^2 \varepsilon_0} = \frac{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

Leitungstheorie

Ersatzschaltbild eines kurzen Leiterstücks der Länge Δz:



Zweidrahtleitung

Telegraphengleichung (TGG):

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = L'C'\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + (C'R' + G'L')\frac{\partial I}{\partial t} + G'R'I$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = L'C'\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (C'R' + G'L')\frac{\partial u}{\partial t} + G'R'u$$

Lösung der TGG:

$$I(z,t) = I\, e^{i\omega t - \gamma z} \; ; \qquad \gamma = \sqrt{(R' + i\omega L')(G' + i\omega C')}$$

a) Leiten Sie die Differentialgleichung her, welche die Orts- und Zeitabhängigkeit des Stroms und der Spannung auf der Leitung beschreiben

b) Bestimmen Sie dann über $I = \frac{u}{z}$ die allgemeine Impedanz eines Kabels

c) Bestimmen Sie die Impedanz eines verlustfreien Kabels

Die Leiter der Leitungen sind bei Stromfluss von magnetischen Feldern umgeben. Die entstehenden magnetischen Feldenergie führt zu induktiven Wirkungen. Zwischen den beiden Leitern bestehen Spannungen und elektrische Felder. Die elektrische Feldenergie führt zur kapazitiven Wirkungen. Induktive und kapazitive Wirkungen sind längs der Leitung stetig verteilt, so dass ein Ersatzschaltbild aus unendlich vielen, unendlich kleinen Spulen und Kondensatoren besteht.

Durch den Stromfluss in den Leitern entstehen Verluste, für die als Ursache ein Längswiderstand ΔR in Serie zu ΔL eingesetzt wird. Ebenso wird das Auftreten dielektrischer Verluste d.h. Verluste die durch Wechselfelder im Isolatormaterial auftreten und in Wärme umgewandelt werden, durch einen Parlelleitwert ΔG berücksichtigt (Parallelleitwert $\frac{1}{R_i} = G_i$)