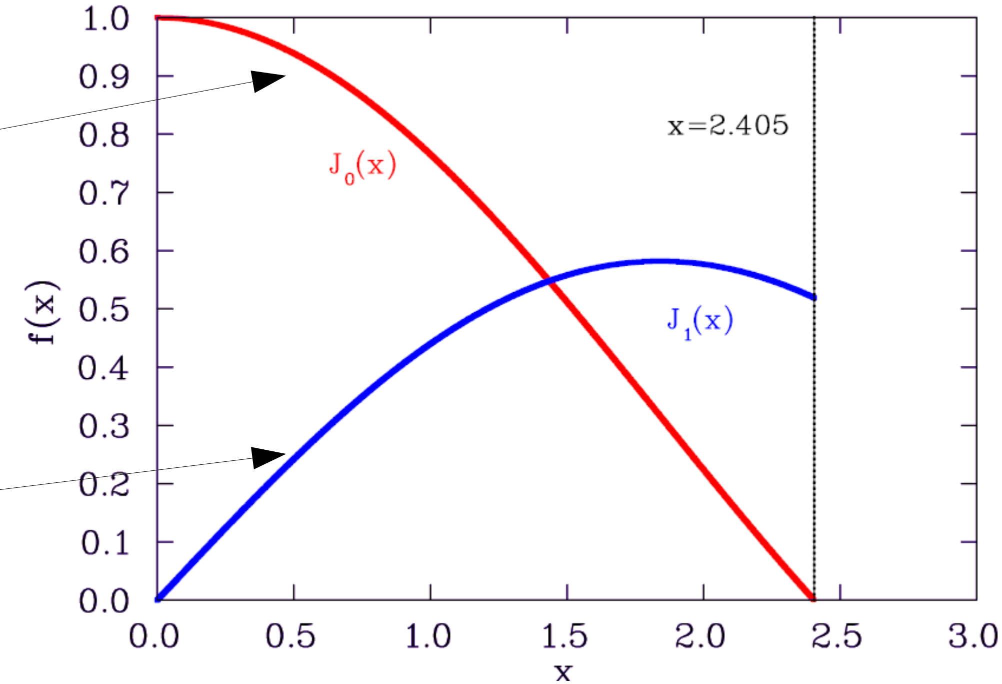
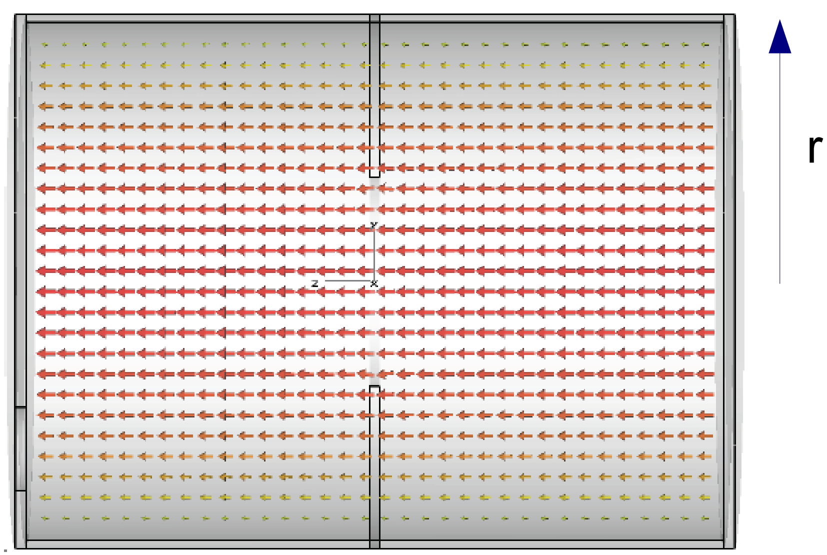
a) Skizziere die Feldverläufe:

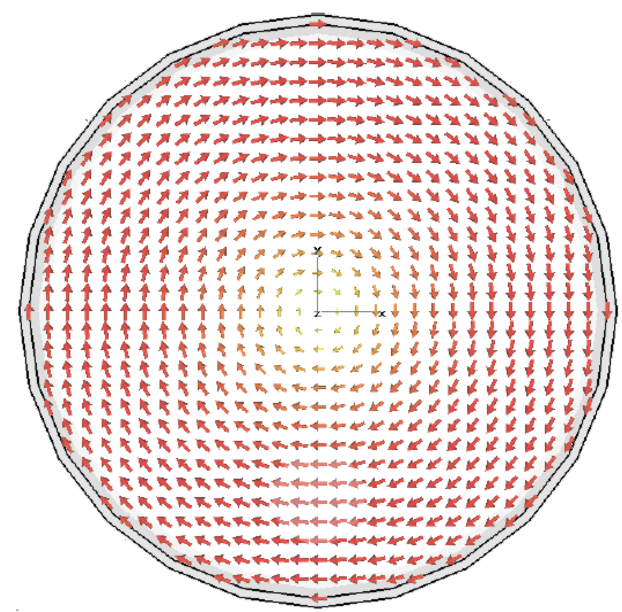
$$E_z(r) \sim J_0\left(\frac{x_{01}}{R}\cdot r\right)$$

$$B_\phi(r) \sim J_1\left(\frac{x_{01}}{R}\cdot r\right)$$





$E_z(r)$



$B_\phi(r)$

Welcher Resonatorradius ergibt sich bei einer Resonanzfrequenz von 100 MHz?
Überlegen Sie, warum die Tanklänge l für p=0 nicht in die Resonanzfrequenz eingeht?

$$f_{E,mnp} = \frac{c}{2\pi R} \cdot \sqrt{x_{mn}^2 + \left(\frac{p \cdot \pi \cdot R}{l}\right)^2} \quad \Leftrightarrow \quad R^2 = \frac{x_{mn}^2}{\left(f_{E,mnp} \cdot \frac{2\pi}{c}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}$$

TEM_{010}: m=0, n=1, p=0, f=100[MHz]

=>
$$\boxed{R = \frac{x_{01}}{\left(f_{E,mnp} \cdot \frac{2\pi}{c}\right)} = \frac{2.405}{\left(100 \cdot 10^6 \cdot \frac{2\pi}{c}\right)} = 1.148[m]}$$

b) $gegeben:$ $gesucht:$

$$f = 100[MHz]$$
$$l = 1[m]$$
$$Q = 10^5$$
$$U_{max} = E_0 \cdot l = 1[MV]$$
$$x_{01} = 2.405$$

$$A = \text{Querschnittsfläche der Einkoppelschleife}$$

(1) $$U_{0,Leitung} = -U_{-ind,Resonator} = \dot{\Phi} = \frac{d}{dt}\int_{schleife} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \dot{B}_{\phi}(r=R) \cdot A$$

$$\boxed{A = \frac{U_{0,Leitung}}{\dot{B}_{\phi}(r=R)}}$$

(2) $$\dot{B}_{\phi}(r=R) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{c} \cdot E_0 \cdot J_1(2.405) \cdot \cos(\omega t)\right) = \frac{1}{c} \cdot \frac{U_{max}}{l} \cdot J_1(2.405) \cdot \omega$$

$$\boxed{\dot{B}_{\phi}(r=R) = \frac{1}{c} \cdot \frac{10^6}{1} \cdot 0.519 \cdot 2\pi \cdot 100 \cdot 10^6 = 1.087 \cdot 10^6 [T/s]}$$

(3)

$$P_{leitung} = \frac{U^2_{0,Leitung}}{Z_L} = P_{verlust,Resonator}$$

$$Z_L \approx R = 50\,\Omega$$

$$\boxed{U_{0,Leitung} = \sqrt{\frac{P_{verlust,Resonator}}{R}}}$$

$$P_{verlust,Resonator} = \omega \cdot \frac{W}{Q}$$

Im Resonator gespeicherte Energie W:

$$W = \int (\ D^2(t) + H^2(t)\ )\, dV = const$$

In Zylinderkoordinaten:

$$W = l \cdot 2\pi \cdot \int_0^R dr \cdot r \cdot \epsilon_0 \cdot \left(E_z^{max}(r)\right)^2 = l \cdot 2\pi \cdot \int_0^R dr \cdot r \cdot \frac{\left(B_\phi^{max}(r)\right)^2}{\mu_0}$$

$$W = l \cdot 2\pi \cdot \int_0^R dr \cdot r \cdot \epsilon_0 \cdot \left(E_0 \cdot J_0\left(\tfrac{x_{01}}{R} \cdot r\right)\right)^2 = l \cdot 2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot E_0^2 \cdot \int_0^R dr \cdot r \cdot \left(J_0\left(\tfrac{x_{01}}{R} \cdot r\right)\right)^2$$

$$\left.\begin{aligned} l &= 1[m] \\ E_0 &= 1[MV/m] \\ R &= 1.148[m] \\ x_{01} &= 2.405 \end{aligned}\right\} \boxed{W = l \cdot 2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot E_0^2 \cdot \int_0^R dr \cdot r \cdot \left(J_0\left(\frac{x_{01}}{R} \cdot r\right)\right)^2 = 9.87[J]}$$

$$P_{verlust\,,\,Resonator} = \omega \cdot \frac{W}{Q} = 2\pi \cdot 100 \cdot 10^6 \cdot \frac{9.87}{10^5} = 61.984[kW]$$

$$U_{0,\,Leitung} = \sqrt{\frac{P_{verlust\,,\,Resonator}}{R}} = 35.21[V]$$

$$\boxed{A = \frac{U_{0,\,Leitung}}{\dot{B}_{\phi}(r=R)} = \frac{35.21}{1.087 \cdot 10^6} = 3.24 \cdot 10^{-5}[m^2] = 32.4[mm^2]}$$