Kapitel 1

Die Maxwellschen Feldgleichungen

Durchflutungsgesetz (Ampere 1826, Verschiebungsstrom)

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{1.1}$$

Induktionsgesetz (Faraday, 1831)

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (1.2)\\
\vec{H} &= \text{magn. Feldstärke}\\
\vec{j} &= \text{Stromdichte („äußere Ströme“)}\\
\vec{D} &= \text{elektr. Verschiebung}\\
\vec{E} &= \text{elektr. Feldstärke}\\
\vec{B} &= \text{magn. Induktion}
\end{aligned}$$

Die beiden anderen Maxwell-Gleichungen (sog. Nebenbedingungen) können aus den ersten beiden Gleichungen abgeleitet werden, wenn man zusätzlich die Ladungserhaltung berücksichtigt:

Aus geschlossener Fläche fließender Strom = Aus eingeschlossenem Volumen abfließende Ladung pro Zeit

$$\oint_A \vec{j}\ d\vec{A} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\ dV \tag{1.3}$$

ρ bedeutet dabei die „äußere “Ladungsdichte: Das betrachtete Volumen soll groß genug sein, so dass über Polarisationseffekte etc. gemittelt wird.

Mit dem Gaußschen Satz ergibt sich:

$$\oint_A \vec{j}\ d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j}\ dV \tag{1.4}$$

und damit wird aus der vorstehenden Gleichung:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad \text{(Kontinuitätsgleichung).} \tag{1.5}$$

Aus dem Induktionsgesetz wird durch Bilden der Divergenz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \tag{1.6}$$

$$\text{Allgemein gilt: } \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{a} = 0. \tag{1.7}$$

Damit ist nur eine Ortsabhängigkeit für $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ möglich:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = F(\vec{x}) \tag{1.8}$$

Mit dem Gaußschen Gesetz gilt bzgl. Ortsabhängigkeit von $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$:

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \; dV = \oint_A \vec{B} \; d\vec{A} \tag{1.9}$$

$\boxed{\text{Es gibt nach heutigem Stand } \textbf{keine} \text{ magn. Monopole!}}$

Damit folgt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0; \qquad \text{Immer erhalten} \tag{1.10}$$

Das Durchflutungsgesetz liefert ebenfalls durch Bilden der Divergenz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = 0$$

$$\text{Integralform: } \left[\oint \vec{j} \cdot d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \; dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \; dV \right]. \tag{1.11}$$

Mit der Kontinuitätgleichung wird daraus

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho. \tag{1.12}$$

Die Gleichungen 1.1, 1.2, 1.10 und 1.12 sind die Maxwellschen Feldgleichungen in allgemein gültiger Form.

$\vec{D}$ und $\vec{E}$ bzw. $\vec{H}$ und $\vec{B}$ wurden eingeführt, um die Feldeffekte bei Vorhanden sein von Materie möglichst allgemein zu erfassen. **Im Vakuum** gelten die Verknüpfungen

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_\circ \cdot \vec{H} \\ \vec{D} &= \varepsilon_\circ \cdot \vec{E}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Dimensionen: $H \,|A/m;\quad B\,\big|\frac{Vs}{m^2};\; E\,\big|\frac{V}{m}\quad D\,\big|\frac{As}{m^2}$. Bei Einbringen von Materie in Felder tritt elektrische und magnetische Polarisation auf (induzierte Dipolfelder oder Ausrichtung permanenter Dipole). Höhere Mulitpolanteile können im Allgemeinen vernachlässigt werden.

$$\text{Elektrische Polarisation:} \qquad \vec{P}(\vec{x}) = \sum_i n_i \cdot \langle \vec{p}_i \rangle \tag{1.14}$$

$$\text{Magnetische Polarisation:} \qquad \vec{M}(\vec{x}) = \sum_i ni \cdot \langle \vec{m}_i \rangle \tag{1.15}$$

$$\vec{p}_i = q \cdot \Delta\vec{x} \qquad ; \vec{m}_i = I \cdot \Delta\vec{a} \tag{1.16}$$

Teilchendichte der Sorte i:
$\langle p_i \rangle \quad \langle m_i \rangle$ = mittleres elektrisches bzw. magnetisches Dipolmoment eines Teilchens der Sorte i am Ort $\vec{x}$.

Allgemein gültige Beziehungen zwischen $\vec{H}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{E}$:

$$\vec{D} = \varepsilon_\circ \cdot \vec{E} + \vec{P} \tag{1.17}$$

$$\underbrace{\vec{B} = \mu_\circ(\vec{H} + \vec{M})}_{\text{(Diese Definition von } \vec{M} \text{ ist bei Physikern üblich)}} \tag{1.18}$$

Mit Ausnahme von ferro-, ferrimagnetischen sowie anderen Materialien mit komplexen Eigenschaften gilt für nicht zu große $\vec{E}$ und $\vec{H}$ die lineare Näherung

$$\vec{P} = \varepsilon_\circ \chi_e \cdot \vec{E} \tag{1.19}$$
$$\vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H}. \tag{1.20}$$

χ_e, χ_m sind die elektrische bzw. magnetische Suszeptibilität; im isotropen Medium Skalare, sonst Tensoren. Dann ergeben sich die sog. Materialgleichungen:

$$\vec{D} = \varepsilon_\circ \varepsilon_r \vec{E}; \qquad \text{mit } \varepsilon_r = \chi_e + 1 \tag{1.21}$$
$$\vec{B} = \mu_\circ \mu_r \vec{H}; \qquad \text{mit } \mu_r = \chi_m + 1 \tag{1.22}$$

ε_r, μ_r sind Permittivitätszahl bzw. Permiabilitätszahl. $\vec{j}$ und $\vec{E}$ werden über die Leitfähigkeit σ verknüpft:

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} \tag{1.23}$$

Bewegungsgleichung für Teilchen mit Ladung q, Masse m und Geschwindigkeit $\vec{v}$ in elektromagnetischen Feldern:

$$\frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{1.24}$$

Die Maxwellgleichungen in Materie lauten zusammengefasst:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Die Maxwellgleichungen in Vakuum:
In diesem Fall sind $\rho, \vec{j}$ durch ‚punktförmige ‘, frei im Vakuum bewegliche, massebehaftete Ladungsträger verursacht sowie durch ideal leitende Wände als Außenberandung (kein Eindringen

von Feldern, nur Oberflächenladungen und -ströme). Dann gilt:

$$\begin{aligned} c^2 \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{\vec{j}}{\varepsilon_\circ} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_\circ} \end{aligned} \tag{1.26}$$